8 IIR-Systeme

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 14. April 2016, 10:38

Aufgabe 1: Reviewfragen

1. Welchen Einfluss hat eine Nullstelle oder ein Pol mit $\left|z_\infty\right| = \left|z_0\right| = 1$ auf den Betragsgang?
2. Durch welche beiden Funktionen wird die Übertragungseigenschaft von LTI-Systemen im Bild- und im Zeitbereich charakterisiert?
3. Wie lassen sich diese Funktionen ineinander überführen?
4. Was ist die Bedingung, damit es keinen Impuls an der Stelle null in Gleichung (11.8), also $B_0 = 0$, gibt?
5. Was ist die Bedingung, dass die Impulsantwort eines IIR-Systems stabil ist?

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $H_2(z)$ in Beispiel 11-2 von Hand.
Hinweis: Hierzu ist erst eine Polynomdivision nötig, damit der Zählergrad geringer als der Nennergrad ist.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Impulsantwort von $h_2[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H_2(z)\}$.
Hinweis: Nutzen Sie für den dritten Term den Satz zur Linksverschiebung.

Tabelle 1: Rechenregeln für die z-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) \circ\!\!-\!\!\bullet\ c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$
Ähnlichkeitssatz	$a^k f(k) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\frac{z}{a})$
Rechtsverschiebung	$f(k-n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-n} F(z)$
Linksverschiebung	$f(k+n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^n F(z) - z^n \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{-\ell} f(\ell)$
Differenzsatz	$\Delta f(k) = f(k) - f(k-1) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z-1}{z} F(z)$
Summensatz	$f_\Sigma(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z}{z-1} F(z)$
Faltungssatz	$\sum_{i=0}^{\infty} f_1(k-i) f_2(i) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F_1(z) \cdot F_2(z)$
Dämpfungssatz	$\mathrm{e}^{-akT} f(k) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\mathrm{e}^{-aT} z)$
Anfangswertsatz	$f(0+) = \lim_{z\to\infty} F(z)$
Endwertsatz	$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}((1-z^{-1})F(z))$

Tabelle 2: Einige Korrespondenzen der z-Transformation

Nr.	$f(k)$	$F(z)$
1	$\delta_{k,0} = \begin{cases} 1 & \text{für } k=0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$	1
2	$\delta_{k-k_0,0} = \begin{cases} 1 & \text{für } k=k_0 \\ 0 & \text{für } k \neq k_0 \end{cases}$	z^{-k_0}
3	$h(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$
4	k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
5	k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	a^k	$\frac{z}{z-a}$
7	$a^k k$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
8	$a^k k^2$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
9	$1-a^k$	$\frac{z(1-a)}{(z-1)(z-a)}$

Tabelle 3: Laplace- und z-Transformierte einfacher diskreter Zeitfunktionen

Nr.	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1	$\frac{1}{s}$	$h(kT) = 1(kT) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$
5	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kT\mathrm{e}^{-akT}$	$\frac{Tz\mathrm{e}^{-aT}}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^2}$
6	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2\mathrm{e}^{-akT}$	$\frac{T^2}{2}\mathrm{e}^{-aT}z\frac{z+\mathrm{e}^{-aT}}{(z-\mathrm{e}^{-aT})^3}$
7	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-\mathrm{e}^{-akT}$	$\frac{z(1-\mathrm{e}^{-aT})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT})}$
8	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\cos\omega_0 kT$	$\frac{z(z-\cos\omega_0 T)}{z^2-(2\cos\omega_0 T)z+1}$
9	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sin\omega_0 kT$	$\frac{z\sin\omega_0 T}{z^2-(2\cos\omega_0 T)z+1}$
10	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{e}^{-akT}\cos\omega_0 kT$	$\frac{z(z-\mathrm{e}^{-aT}\cos\omega_0 T)}{z^2-2\,\mathrm{e}^{-aT}(\cos\omega_0 T)\,z+\mathrm{e}^{-2\,aT}}$
11	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{e}^{-akT}\sin\omega_0 kT$	$\frac{z\mathrm{e}^{-aT}\sin\omega_0 T}{z^2-2\,\mathrm{e}^{-aT}(\cos\omega_0 T)\,z+\mathrm{e}^{-2\,aT}}$

8 Lösungen

Lösung Aufgabe 1:

1. Nullstelle: Betragsgang=0, Pol: Betragsgang = ∞, an der Stelle $\Omega = 0$, bzw. $\Omega/\pi = \pm\varphi$, mit $\varphi = \arg(z)$
2. Bildbereich: Übertragungsfunktion $H(z)$, Zeitbereich: Impulsantwort $h[n]$
3. z-Transformation, beide Funktionen bilden ein z-Transformationspaar
4. Zählergrad kleiner als der Nennergrad.
5. Alle Pole müssem im Einheitskreis liegen, d.h. $\left|z_{\infty i}\right| < 1$

Lösung Aufgabe 2:

Polynomdivision:

$$z^{-2} + 1 \div 0.25z^{-2} - z^{-1} + 1 = 4 + \frac{4z^{-1} - 3}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
&\frac{4z^{-1} - 3}{(1 - 0.5z^{-1})^2} = \frac{A}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{B}{(1 - 0.5z^{-1})^2} \\
&z^{-1} = 2 : B = 4z^{-1} - 3 = 5 \\
&z^{-1} = 1 : A = \frac{4z^{-1} - 3}{(1 - 0.5z^{-1})} - \frac{5}{(1 - 0.5z^{-1})} = -8
\end{aligned}$$

und somit

$$H_2(z) = 4 - \frac{8}{1 - 0.5z^{-1} + \frac{5}{(1-0.5z^{-1})^2}} = 4 - \frac{8z}{z - 0.5} + \frac{5z^2}{(z - 0.5)^2}$$

Lösung Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}
h[n] &= 4\delta[n] - 8 \cdot 0.5^n + 10 \cdot 0.5^{n+1} \cdot (n + 1) \\
&= 4\delta[n] - 8 \cdot 0.5^n + 5 \cdot 0.5^n \cdot (n + 1)
\end{aligned}$$