3 Diskrete Fourier-Transformation

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 3. März 2016, 14:56

Aufgabe 1: Reviewfragen

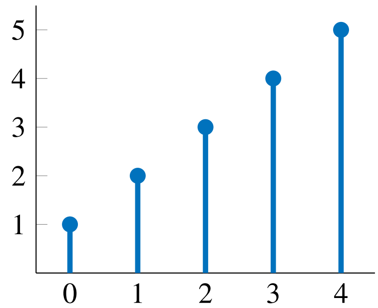
1. Lässt sich - ohne den weiteren Zusammenhang zu kennen - erkennen, ob eine (ggf. komplexe) Folge der Länge n eine Zeitfolge oder ein Spektrum ist?
2. Geben Sie jeweils die eulersche Formel an: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = ?$, $\sin\varphi = ?$, $\cos\varphi = ?$
3. Welche Eigenschaft folgt aus dem Zuordnungsschema in Gleichung (3.22) für die DFT-Koeffizienten $X[k]$ *reeller* Folgen $x[n]$ mit geraden Längen $N = 2M$?

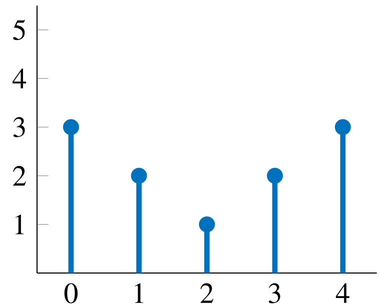
Aufgabe 2:

Führen Sie die Zwischenrechnungen von Gleichung (3.6) zu (3.7) und von (3.7) zu (3.8) durch. Nutzen Sie die Eulerformel $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)$ sowie die geometrische Reihe $s_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie jeweils die zyklisch verschobene Folge $v[n] = x[n-m]$ für $m = 2$





Aufgabe 4:

Geben Sie die Symmetriebeziehung der DFT-Koeffizienten $X[k]$ für reelle Folgen $x[n]$ mit *ungeraden* Längen $N = 2M + 1$ an. Betrachten Sie hierzu beispielhaft $x[n] = \sin(\Omega_0 \cdot n)$ mit $\Omega_0 = \frac{2\pi}{6}$, $N = 7$ mit Hilfe des Befehls `fftgui`. Fügen Sie hierzu den Beispielordner, der `fftgui` enthält, zu Ihrem Matlab-Pfad hinzu:

```
addpath(fullfile(matlabroot,'/help/matlab/math/examples'))
```

3 Lösungen

Lösung Aufgabe 1:

1. Nein, es kann jede geordnete Folge endlicher Länge prinzipiell sowohl als Zeitsignal als auch als Spektrum interpretiert werden. Und die Sätze der DFT für den Zeitbereich haben ihre Entsprechungen im Frequenzbereich.

2.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} &= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin \mathrm{i}\varphi \\
\sin\varphi &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right) \\
\cos\varphi &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

3. Die DFT-Koeffizienten sind symmetrisch: der Realteil ist gerade und der

Lösung Aufgabe 2:

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{31} \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{32}nk} \text{ mit } \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right) && (3.6)\\
&= \sum_{n=0}^{31} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}n} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}n}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{32}nk} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{31} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{16}n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{16}nk} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{16}n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{16}nk}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{31} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{16}n-\mathrm{i}\frac{\pi}{16}nk} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{16}n-\mathrm{i}\frac{\pi}{16}nk}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{31} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}(2-k)n} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{16}(2+k)n}\right) \text{ mit } q_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{16}(2\mp k)} && (3.7)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-q_1^{32}}{1-q_1} + \frac{1-q_2^{32}}{1-q_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\pi(2-k)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}(2-k)}} + \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(2+k)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{16}(2+k)}}\right) && (3.8)
\end{aligned}
$$

Lösung Aufgabe 3:

Lösung Aufgabe 4:

$X[k] = X[N-k]$