18 Übungen zeitdiskreter Zustandsraum

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 21. April 2015, 16:15

Aufgabe 1: Reviewfragen

(a) Was ist die Lösung des Systems $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$?

(b) Unter welcher Voraussetzung lässt sich aus der Steuer- und Beobachtbarkeit des kontinuierlichen Systems auf die Steuer- und Beobachtbarkeit des diskretisierten Systems schließen?

(c) Wie lässt sich die Fundamentalmatrix (=Transitionsmatrix) bei hinreichend kleiner Abtastzeitschrittweit T mit geringem Rechenaufwand approximieren?

(d) Wie lässt sich aus der diskreten Zustandsraumdarstellung die z-Übertragungsfunktion bestimmen?

Aufgabe 2:

Die Zustandsraumdarstellung eines dynamischen Systems lautet

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Matrizen der zeitdiskreten Zustandsraumdarstellung in Abhängigkeit von der Abtastzeitschrittweite T.

(b) Bestimmen Sie die obere Grenze der Abtastzeitschrittweite T, so dass das diskrete System vollständig steuer- und beobachtbar ist.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Pole $s_{1,2}$ der Systemmatrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ sowie die Pole $z_{1,2}$ der entsprechenden Fundamentalmatrix $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$. Welcher Zusammenhang bestätigt sich hier?

Aufgabe 4:

Welche Transitionsmatrix $\Phi(T)$ gehört zu $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$?

Aufgabe 5:

Gegeben ist ein System vierter Ordnung in Regelungsnormalform, und zwar mit der Matrix $\boldsymbol{A}$, die in der letzten Zeile aus lauter Nullen besteht, $\boldsymbol{B}$ mit 1 in der letzen Zeile und sonst lauter Nullen und einer Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$. Wie lautet die Transitionsmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t)$ und die Übertragungsfunktion $G(s)$?
Hinweis: Nutzen Sie die Taylor-Entwicklung der Fundamentalmatrix.

Aufgabe 6:

Die diskrete Zustandsraumdarstellung entspricht einer Reihenschaltung der kontinuierlichen Übertragungsfunktion mit einem Halteglied 0-ter Ordnung und idealer Abtastung. Zeigen Sie das beispielhaft, indem Sie die z-Übertragungsfunktion von

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

auf zwei Wegen berechnen:

(a) $G(z) = \dfrac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \dfrac{G(s)}{s} \right\}$

(b) $G(z) = \dfrac{\boldsymbol{C} \; \mathrm{adj}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_\mathrm{d})\boldsymbol{B}_\mathrm{d}}{\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_\mathrm{d})}$

Lösung 1:

(a) $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}u(t)\,\mathrm{d}\tau$

(b) $T < \dfrac{\pi}{\omega_{\mathrm{max}}}$

(c) $\Phi \approx \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T$

(d) $G(z) = \dfrac{\boldsymbol{C}\ \mathrm{adj}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{d}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{d}}}{\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\mathrm{d}})}$

Lösung 2:

(a)

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-T} & T\mathrm{e}^{-T} \\ 0 & \mathrm{e}^{-T} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 2 - T\mathrm{e}^{-T} - 2\mathrm{e}^{-T} \\ 1 - \mathrm{e}^{-T} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}} = C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Pole von $\boldsymbol{A}$: $s_{1,2} = -1 \Rightarrow \omega_{\mathrm{max}} = 1 \Rightarrow T < \pi$

Lösung 3:

$s_1 = -1,\ s_2 = -2,\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{d}} \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2\,t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2\,t} \\ 2\,\mathrm{e}^{-2\,t} - 2\,\mathrm{e}^{-t} & 2\,\mathrm{e}^{-2\,t} - \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$, $z_1 = \mathrm{e}^{-t}$, $z_2 = \mathrm{e}^{-2t}$, Zusammenhang: $z = \mathrm{e}^{st}$

Lösung 4:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-T}\left(\cos(2\,T) + \dfrac{\sin(2\,T)}{2}\right) & \dfrac{\sin(2\,T)\ \mathrm{e}^{-T}}{2} \\ -\dfrac{5\ \sin(2\,T)\ \mathrm{e}^{-T}}{2} & \mathrm{e}^{-T}\left(\cos(2\,T) - \dfrac{\sin(2\,T)}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Lösung 5:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2 \tfrac{t}{2} + \boldsymbol{A}^3 \tfrac{t}{6} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \mathcal{L}\left\{\boldsymbol{\Phi}(t)\right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^4} \\ 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{7\,s^3 + 8\,s^2 + 3\,s + 4}{s^4}$$

Lösung 6:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{3\,\mathrm{e}^{2\,T} - 4\,\mathrm{e}^{3\,T} - 4\,z\,\mathrm{e}^{2\,T} + 3\,z\,\mathrm{e}^{3\,T} + z\,\mathrm{e}^{5\,T} + 1}{6\,\left(z\,\mathrm{e}^{2\,T} - 1\right)\,\left(z\,\mathrm{e}^{3\,T} - 1\right)} \\ &= \frac{3\,\mathrm{e}^{2\,T} - 4\,\mathrm{e}^{3\,T} - 4\,z\,\mathrm{e}^{2\,T} + 3\,z\,\mathrm{e}^{3\,T} + z\,\mathrm{e}^{5\,T} + 1}{6\,\left(z^2\,\mathrm{e}^{5\,T} - z\,\mathrm{e}^{2\,T} - z\,\mathrm{e}^{3\,T} + 1\right)} \end{aligned}$$