17 Übungen Diskrete Systeme

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 21. April 2015, 14:54

Aufgabe 1: Reviewfragen

(a) Wie hängen z- und s-Ebene zusammen?

(b) Wie wird die linke s-Halbebene in die z-Ebene abgebildet?

(c) Unter welcher Voraussetzung gilt der Endwertsatz für diskrete Systeme?

(d) Beschreiben sie den Reglerentwurf duch diskrete Äquivalente.

Aufgabe 2:

Die z-Transformierte eines zeitdiskreten Filters $h(k)$ bei einer Abtastrate von 1 Hz ist

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

(a) Diskreter Ein- und Ausgang dieses Filters seien $u(k)$ und $y(k)$. Bestimmen Sie die Differenzengleichung, die den Zusammenhang zwischen $u(k)$ und $y(k)$ beschreibt.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Eigenfrequenz ω_n und das Dämpfungsmaß ζ der Pole von $H(z)$. *Hinweis:* Nutzen Sie den Zusammenhang zwischen z und s.

(c) Begründen Sie, warum das Filter stabil ist.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie mit Hilfe der z-Transformation die Lösung der Differenzengleichung

$$y(k) - 3\,y(k-1) + 2\,y(k-2) = 2\,u(k-1) - 2\,u(k-2)$$

für

$$\text{(a) } u(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad \text{(b) } u(k) = \begin{cases} k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

jeweils mit $y(k) = 0, k < 0$.
Hinweis: Die notwendige Partialbruchzerlegung ist auf zwei Arten möglich: Entweder Zerlegung der Lösung

- $Y(z^{-1})$, anschließend die Partialbrüche umformen in Zähler-/Nennerpolynom in z, *oder*
- Zerlegung in Partialbrüche der Form $\dfrac{z}{(z-z_l)^m}$, das heißt Partialbruchzerlegung von $Y^*(z)$ mit $Y(z) = z \cdot Y^*(z)$.

Aufgabe 4:

Die Fibonacci-Zahlen werden durch die Differenzengleichung

$$u(k+2) = u(k+1) + u(k) \text{ mit } u(0) = u(1) = 1$$

generiert.

(a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $U(z)$.
Hinweis: Nutzen Sie den Linksverschiebungssatz

$$f(k+n) \circ\!\!-\!\!\bullet\; z^n F(z) - z^n \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{-\ell} f(\ell)$$

(b) Bestimmen Sie die Pole von $U(z)$.

(c) Bestimmen Sie die geschlossene Form der Fibonacci-Reihe $u(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{U(z)\}$.
Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie $u(42)$.

(d) Bestimmen Sie die Fibonacci-Zahlen bis $u(4)$ durch Polynomdivision von $U(z)$.

(e) Zusatzaufgabe: Was ist das Verhältnis $u(k+1)/u(k)$ zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen für $k \to \infty$?

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie zu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+2}$$

die Differenzengleichung bei Approximation mit einem Halteglied 0-ter Ordnung und einer Abtastzeit von $T = 0.05\,\mathrm{s}$.

Aufgabe 6:

Diskretisieren Sie den Regler

$$D_\mathrm{c}(s) = \frac{\frac{4}{5}s + 1}{50s + 1}$$

durch Approximation mit der Trapezregel (*Tustin's Method*). Setzen Sie die Abtastzeit auf $T = 0.1\,\mathrm{s}$ und geben Sie $D_\mathrm{c}(z)$ als gebrochenrationale Funktion in z^{-1} an.

Lösung 1:

(a) $z = \mathrm{e}^{sT}$

(b) In das innere des Einheitskreises.

(c) Alle Pole innerhalb des Einheitskreises.

(d) Kontinuerlichen Regler entwerfen, diskretisieren, diskrete Analyse / Simulation / Versuch, um den Entwurf zu verifizieren.

Lösung 2:

(a)

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$\Rightarrow Y(z) - \frac{1}{6}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{6}z^{-2}Y(z) = U(z) + \frac{1}{2}z^{-1}U(z)$$
$$\Rightarrow y(k) - \frac{1}{6}y(k-) - \frac{1}{6}y(k-2) = u(k) + \frac{1}{2}u(k-1)$$

(b) Pole bei $z_1 = \dfrac{1}{2}$ und $z_2 = -\dfrac{1}{3}$ in der z-Ebene.

$$z = \mathrm{e}^{sT} \Rightarrow s_1 = \frac{-0.693}{T} \text{ und } s = \frac{1.10 + \mathrm{i}\ 3.14}{T}$$

Aus der Abtastrate 1 Hz folgt die Periodendauer $T = 1\,\mathrm{s}$ und damit

$$\text{für } z_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_n = \frac{0.693}{T} = 0.693\,\mathrm{rad/s}, \quad \zeta = 1$$
$$\text{für } z_1 = -\frac{1}{3}, \quad \omega_n = \frac{3.33}{T} = 3.33\,\mathrm{rad/s}, \quad \zeta = 0.330$$

(c) Beide Pole liegen im Einheitskreis.

Lösung 3:

(i)

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2(z^{-1} - z^{-2})}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{2(z-1)}{z^2 - 3\,z + 2}$$
$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\begin{aligned}Y(z) &= \frac{2(z-1)}{z^2-3\,z+2}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{2\,z\,(z-1)}{(z-1)(z-2)(z-1)} = \frac{2\,z}{(z-2)(z-1)}\\ &= \frac{2\,z}{z-2}-\frac{2\,z}{z-1}\end{aligned}$$

Die inverse z-Transformation mit Hilfe der Tabelle 3 im Skript ergibt

$$y(k) = 2(2^k-1)$$

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{2(z^{-1}-z^{-2})}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{2}{z-2}\\ U(z) &= \frac{z}{(z-1)^2}\end{aligned}$$

$$Y(z) = \frac{2}{z-2}\cdot\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2\,z}{z-2}-\frac{2\,z}{z-1}-\frac{2\,z}{(z-1)^2}$$

Die inverse z-Transformation mit Hilfe der Tabelle 3 im Skript ergibt

$$y(k) = 2(2^k-1-k)$$

Lösung 4:

(a) $U(z) = \dfrac{z^2}{z^2-z-1}$

(b) $z_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(c) $u(k) = \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^k$

(d) $1 : 1-z^{-1}-z^{-2} = 1+z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+5z^{-4}+\cdots$

(e) Wegen $z_2 < 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} z_2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{u(k+1)}{u(k)} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

Lösung 5:

$$\begin{aligned}G(z) &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s(s+2)}\right\}\\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-0.1}}{z-\mathrm{e}^{-0.1}}\\ &= \frac{0.0952\,z^{-1}}{1-0.9048\,z^{-1}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(k) = 0.9048\, y(k-1) + 0.0952\, u(k-1)$$

Lösung 6:

$$D_c(z) = \frac{17 - 15z^{-1}}{1001 - 999z^{-1}}$$