16 Optimale Zustandsschätzung: Kalman-Filter

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 2. April 2015, 11:16

Aufgabe 1: Reviewfragen

(a) Was ist der Unterschied zwischen Kalman-Filter und Beobachter?

(b) Was bedeuten beim Kalman-Filter die Matrizen $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ und R?

(c) Unter welchen Bedingungen konvergiert die Matrix-Riccati-DGL für beliebige, positiv-semidefinite $\boldsymbol{P}(0)$ zu einer positiv-semidefiniten konstanten Lösung $\boldsymbol{P}(\infty)$?

(d) Wie lässt sich mit dem Matlab-Befehl `[K,P] = LQR(A,B,Q,R)` ein Kalman-Filter entwerfen?

(e) Wie lässt sich im Allgemeinen bei einem *nicht* beobachtbaren und *nicht* steuerbaren System feststellen, ob es detektierbar und stabilisierbar ist?

Aufgabe 2: Detektierbarkeit und Stabilisierbarkeit

Prüfen Sie, ob sich für das System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{w}$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + v$$

mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{E}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ein stabiler, zeitinvarianter Kalman-Filter entwerfen lässt.

Aufgabe 3: Entwurf eines skalaren Kalman-Filters

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + bu + w & a &\neq 0 \\ y &= cx + v & c &\neq 0 \end{aligned}$$

Das Prozessrauschen und das Messrauschen haben die Varianz $q > 0$ und $r > 0$. Bestimmen Sie die optimale Rückführung L des zeitinvarianten Kalman-Filters

$$\dot{\hat{x}} = a\hat{x} + bu + L(y - c\hat{x}).$$

Aufgabe 4: Entwurf eines Kalman Filters

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w}(t) \\ y &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t) + v(t) \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, sowie den Kovarianzmatrizen $\boldsymbol{Q}$ und R des Prozessrauschens $\boldsymbol{w}(t)$ und des Messrauschens $v(t)$ respektive.

a) Die Kovarianzmatrizen seien $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $R = 1$. Entwerfen Sie ein zeitinvariantes Kalman-Filter für das gegebene System, indem sie die optimale Rückführmatrix $\boldsymbol{L}$ für einen Beobachter der Form

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{G}u + \boldsymbol{L}(y - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}})$$

berechnen.

b) Wie ändert sich die Rückführmatrix $\boldsymbol{L}$ in den folgenden Szenarien:

i) $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $R = 10^3$ (sehr hohes Messrauschen)

ii) $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $R = 10^{-3}$ (sehr niedriges Messrauschen)

Berechnen Sie die optimale Rückführmatrix $\boldsymbol{L}$ und die Eigenwerte der Fehlerdynamik $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{H}$ für beide Fälle. Wie sieht die Rückführmatrix $\boldsymbol{L}$ in den beiden Fällen aus und warum? Wie verhalten sich die Eigenwerte der Fehlerdynamik im Vergleich zu den Eigenwerten von $\boldsymbol{F}$ in den beiden Fällen und wie lässt sich dies erklären?

Aufgabe 5:

Beim Entwurf eines zeitinvarianten Kalman-Filters für das System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + v$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

ergibt die Lösung der Matrix-Riccati-DGL

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Bestimmen sie $\boldsymbol{P}$ sowie die Rückführmatrix $\boldsymbol{L}$.

Lösung 1:

Lösung 2:

Lösung 3:

Lösung 4:

Lösung 5: