15 Übungen zur optimalen Regelung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 2. April 2015, 9:13

Aufgabe 1: Reviewfragen

(a) Was sind die Unterschiede zwischen dem zeitvarianten LQR-Verfahren und dem Reglerentwurf durch Polvorgabe?

(b) Was wird jeweils mit den Matrizen $\boldsymbol{P}_{t_1}$, $\boldsymbol{Q}$ und R gewichtet?

(c) Welchen Wert hat $\boldsymbol{P}_{t_1}$ im zeitinvarianten Fall?

(d) In welchem Fall führt die Wahl $\boldsymbol{Q} = 0$ zu einem stabilen Regler?

(e) Was bedeutet detektierbar?

(f) Was bedeutet stabilisierbar?

(g) Was muss gegeben sein, damit beim LQ-Regler Stabilität garantiert ist?

(h) Wie ändert sich die Systemantwort, wenn $\boldsymbol{Q}$ vergrößert, bzw. R verkleinert wird?

Aufgabe 2: Wahl der Tuning-Matrizen

Gegeben sei das lineare, zeitinvariante System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Lässt sich mit der folgenden Wahl von $\boldsymbol{Q}$ und R ein garantiert stabiler LQ-Regler entwerfen? Falls nein, warum nicht?

(a) $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 0$

(b) $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 1$

(c) $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = 1$

(d) $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = 1$

(e) $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $R = -1$

Aufgabe 3: Steuerbarkeit und Detektierbarkeit

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}u \\ y &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

mit

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Transformationsmatrix zur Transformation in die Modalform ist

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Ist das System für $u = 0$ stabil?

(b) Lässt sich das System mit Hilfe eines Zustandsreglers $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ stabilisieren?

(c) Zum Entwurf eines LQ-Reglers mit dem Kostenfunktional

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + u^2)\,\mathrm{d}t$$

soll die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}$ gesetzt werden. Stabilisiert der resultierende Regler $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, der das Kostenfunktional minimiert, das System?

Aufgabe 4: Entwurf eines skalaren LQ-Reglers

Gegeben sei das System

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + 4u(t)$$

und das Kostenfunktional

$$J = \int_0^\infty (10x^2(t) + 2u^2(t))\,\mathrm{d}t$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen zeitinvarianten Riccati-Gleichung.

(b) Wie lautet der Regler $u = -Kx$, der das Kostenfunktional minimiert?

(c) Begründen Sie, ob die Strecke und/oder der optimale Regler stabil sind.

(d) Geben Sie den Zustand $x(t)$ des geschlossenen Kreises für $t > 0$ in Abhängigkeit t und $x(0) = x_0$ an

Aufgabe 5: Entwurf eines LQ-Reglers für ein System 2. Ordnung

Gegeben sei das System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

und das Kostenfunktional

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^\mathrm{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + u^2 \right) \mathrm{d}t$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

lautet.

(b) Bestimmen Sie den Regler $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, der das Kostenfunktional minimiert.

(c) Geben Sie das charakteristische Polynom und die Pole des geschlossenen Regelkreises an.

Aufgabe 6: LQR-Design für ein stehendes Pendel [FPE10, Example 7.23]

Die linearisierte und normierte Bewegungsgleichung eines stehenden Pendels ist $\ddot{\varphi} = \varphi - u$.

(a) Bestimmen Sie den Regler $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, der das Kostenfunktional

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^\mathrm{T} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + u^2 \right) \mathrm{d}t \quad \text{minimiert.}$$

(b) Bestimmen Sie die Pole des geschlossenen Regelkreises.

(c) Bestimmen Sie die Verstärkung $\bar{N}$ des Reglers $u = -\boldsymbol{K}x + \bar{N}r$, so dass im eingeschwungenen Zustand $y = \varphi = r$ gilt. Warum darf r nicht zu groß gewählt werden?

Aufgabe 7: LQR-Entwurf mit Matlab

Bestimmen Sie für das lineare System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

den Regler $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, der das Kostenfunktional

$$J = \int\limits_0^\infty \boldsymbol{x}^\mathrm{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + u^2 \,\mathrm{d}t$$

minimiert. Untersuchen Sie mit Hilfe von Matlab, ob die Bedingungen für einen LQR Reglerentwurf mit garantierter Stabilität erfüllt sind. Simulieren Sie das Einschwingverhalten des geschlossenen Regelkreises mit der Matlab-Funktion `lsim` für $0 \le t \le 6\,\mathrm{s}$.

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

Lösung 1:

Lösung 2:

(a) nein, R nicht positiv definit

(b) ja

(c) ja

(d) nein, $\boldsymbol{Q}$ nicht positiv semi-definit

(e) nein, $\boldsymbol{Q}$ und R negativ definit

Lösung 3:

Transformation auf Modalform ergibt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Positiver Pol bei $s = 2 \Rightarrow$ das System ist instabil.

(b) Stabilisierbarkeit: Instabiler Modus ist steuerbar, weil der Eintrag in der entsprechenden Zeile der Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}$ ungleich Null ist.

(c) Transformation der $\boldsymbol{Q}$-Matrix ergibt

$$\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{T}^\mathrm{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^\mathrm{T}\boldsymbol{H}^\mathrm{T}\boldsymbol{H}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{C}^\mathrm{T}\boldsymbol{C}$$

Das System $[\boldsymbol{Q}^{*0.5}, A] = [\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}]$ muss detektierbar sein. Eintrag in der Spalte des instabilen Modus $\boldsymbol{C}$-Matrix ist Null $\Rightarrow$ nicht detektierbar $\Rightarrow$ der resultierende LQ-Regler stabilisiert das System *nicht*.

Lösung 4:

(a) $F = 2$, $G = 4$, $Q = 10$, $R = 2$. Matrix-Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= -\boldsymbol{F}^\mathrm{T}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^\mathrm{T}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q} = -2P - 2P + 8P^2 - 10 \\ &= 8P^2 - 4P - 10 \\ \Rightarrow P &= \frac{4 + \sqrt{16 + 4 \cdot 8 \cdot 10}}{16} = 1.3956 \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow u(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^\mathrm{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) = -2.7913x(t)$

(c) Pol/Eigenwert der Strecke ist $+2 \Rightarrow$, die Strecke ist instabil. Geschlossener Regelkreis:

$$\dot{x}(t) = 2\,x(t) - 4 \cdot 2.7913x(t) = -9.1652\,x(t)$$

$\Rightarrow$ Pol/Eigenwert des geschlossenen Regelkreises ist $-9.1652 \Rightarrow$, der geschlossene Regelkreis ist stabil.

(d) $x(t) = \mathrm{e}^{-9.1652\,t} x_0$

Lösung 5:

(a)

$$\begin{aligned}
0 &= -\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{G}R^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q} \\
&= \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{G}R^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) $u = -R^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

(c) $s^2 + 4\,s + 5 = 0,\ s_{1,2} = -2 \pm i$

Lösung 6:

Lösung 7: