12 Übung zu Transformationen, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 4. März 2015, 12:50

Aufgabe 1: Verständnisfragen

(a) Was bedeutet es, wenn ein System steuerbar / beobachtbar ist?

(b) Kann eine Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, wobei Zähler- und Nennerpolynom $b(s)$ und $a(s)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, in Zustandsraumdarstellung *nicht* steuer- oder beobachtbar sein?

(c) Geben Sie ein steuerbares / beobachtbares System an, das nicht beobachtbar / steuerbar ist.

(d) Wozu lassen sich Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{C}$ und $\mathcal{O}$ nutzen?

Aufgabe 2: Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit

Gegeben ist das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2u\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + u\\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

Ist das System steuerbar? Ist es beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3: Transformation auf Regelungs- und Beobachtungsnormalform

a) [FPE10, Aufgabe 7.6]: Gegeben sind die Zustandsmatrizen

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}-2 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad J = 0$$

Bestimmen Sie die Transformation $\boldsymbol{T}$ mit $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$, so dass die Zustandsmatrizen, die die Dynamik von $\boldsymbol{z}$ beschreiben, in Beobachtungsnormalform sind. Berechnen Sie die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und D.

b) Transformieren Sie obiges System entsprechend in die Regelungsungsnormalform.

Aufgabe 4: Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit

Gegeben ist folgendes System in Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ 0.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} (1+\alpha)/\sqrt{2} \\ 0 \\ (-1+\alpha)/\sqrt{2} \end{bmatrix} u \tag{1a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{1b}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist ein Parameter des Systems.

a) Berechnen Sie die Beobachtbarkeitsmatrix und bestimmen Sie, ob das System beobachtbar ist.

b) Berechnen Sie die Steuerbarkeitsmatrix und bestimmen Sie, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ das System steuerbar ist.

Aufgabe 5: Zustandstransformation

Es ist eine Zustandstransformation des Systems (1) der Form

$$x = \boldsymbol{T}z$$

gegeben, wobei z den transformierten Zustand bezeichnet. Die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ und ihre Inverse $\boldsymbol{T}^{-1}$ sind wie folgt gegeben:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des transformierten Systems an. Welche Form liegt hier vor?

b) Wie können Sie aus der transformierten Darstellung *ohne* Berechnung der Steuerbarkeits- und der Beobachtbarkeitsmatrix sofort auf die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit von System (1) schließen?

c) Nehmen Sie nun den Fall $\alpha = 0$ an. Welche Dimension besitzt der steuerbare Unterraum des Systems (1)?

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.