12 Übung zu Transformationen, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 6. März 2015, 12:04

Aufgabe 1: Verständnisfragen

(a) Was bedeutet es, wenn ein System steuerbar / beobachtbar ist?

(b) Kann eine Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$, wobei Zähler- und Nennerpolynom $b(s)$ und $a(s)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, in Zustandsraumdarstellung *nicht* steuer- oder beobachtbar sein?

(c) Geben Sie ein steuerbares / beobachtbares System an, das nicht beobachtbar / steuerbar ist.

(d) Wozu lassen sich Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ nutzen?

Aufgabe 2: Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit

Gegeben ist das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2u\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + u\\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

Ist das System steuerbar? Ist es beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3: Transformation auf Regelungs- und Beobachtungsnormalform

a) [FPE10, Aufgabe 7.6]: Gegeben sind die Zustandsmatrizen

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}-2 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad J = 0$$

Bestimmen Sie die Transformation $\boldsymbol{T}$ mit $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$, so dass die Zustandsmatrizen, die die Dynamik von $\boldsymbol{z}$ beschreiben, in Beobachtungsnormalform sind. Berechnen Sie die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und D.

b) Transformieren Sie obiges System entsprechend in die Regelungsungsnormalform.

Aufgabe 4: Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit

Gegeben ist folgendes System in Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ 0.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} (1+\alpha)/\sqrt{2} \\ 0 \\ (-1+\alpha)/\sqrt{2} \end{bmatrix} u \tag{1a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{1b}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist ein Parameter des Systems.

a) Berechnen Sie die Beobachtbarkeitsmatrix und bestimmen Sie, ob das System beobachtbar ist.

b) Berechnen Sie die Steuerbarkeitsmatrix und bestimmen Sie, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ das System steuerbar ist.

Aufgabe 5: Zustandstransformation

Es ist eine Zustandstransformation des Systems (1) der Form

$$x = \boldsymbol{T} z$$

gegeben, wobei z den transformierten Zustand bezeichnet. Die Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ und ihre Inverse $\boldsymbol{T}^{-1}$ sind wie folgt gegeben:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des transformierten Systems an. Welche Form liegt hier vor?

b) Wie können Sie aus der transformierten Darstellung *ohne* Berechnung der Steuerbarkeits- und der Beobachtbarkeitsmatrix sofort auf die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit von System (1) schließen?

c) Nehmen Sie nun den Fall $\alpha = 0$ an. Welche Dimension besitzt der steuerbare Unterraum des Systems (1)?

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

Lösung 1:

(a) steuerbar: Alle Zustände x_i lassen sich durch den Eingang u beinflussen
beobachtbar: Alle Zustände x_i lassen sich mit Hilfe des Ausgangs y rekonstruieren.

(b) Nein. Die Übertragungsfunktion kann in Regelungs- und in Beobachtungsnormalform dargestellt werden, sie führt somit auf eine steuer- und beobachtbare Zustandsraumdarstellung.

(c) $a_2 \neq 0$, $a_1 \neq 0$

$$\text{steuer-, aber nicht beobachtbar: } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{beobacht-, aber nicht steuerbar: } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösung 2:

Lösung 3:

a)

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

b)

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 20 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

Lösung 4:

a)

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \det(\boldsymbol{\mathcal{O}}) = -6\sqrt{2} \Rightarrow \text{ beobachtbar}$$

b)

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\,(\alpha+1)}{2} & -\frac{\sqrt{2}\,(\alpha-1)}{2} & \frac{\sqrt{2}\,(\alpha+1)}{2} \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}\,\alpha}{2} & -\frac{3\sqrt{2}\,\alpha}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\,(\alpha-1)}{2} & \sqrt{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) & \sqrt{2}\left(2\,\alpha - \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$\det(\boldsymbol{\mathcal{C}}) = -3\sqrt{2}\alpha^2 \Rightarrow$ steuerbar für $\alpha \neq 0$

Lösung 5:

a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Modalform (Jordanform ist auch richtig)}$$

b) Steuerbar sind die Zustände, für die der entsprechende Eintrag in der Eingangsmatrix $\boldsymbol{B}$ oder $\boldsymbol{G}$ ungleich null ist. Beobachtbar sind die Zustände, für die der entsprechende Eintrag in der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{C}$ oder $\boldsymbol{H}$ ungleich null ist.

c) Für $\alpha = 0$ ist $\boldsymbol{B} = [0, 1, 0]^{\mathrm{T}}$, es gibt somit einen steuerbaren Zustand, bzw. die Dimension des steuerbaren Unterraums ist $= 1$.