11 Übungen kanonische Formen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 25. Februar 2015, 16:38

Aufgabe 1: Review-Fragen

(1) Wie viele verschiedene Zustandsraumdarstellungen gibt es zu einer Übertragungsfunktion?

(2) Wofür wird die Jordanform genutzt?

(3) Wie lässt sich die Regelungsnormalform aus der Beobachtungsnormalform bestimmen?

(4) Was ist der Unterschied zwischen Modal- und Jordanform?

Aufgabe 2: Regelungs- und Beobachtungsnormalform ([FPE10, Aufg. 7.18])

Geben Sie die Matrizen der Zustandsgleichungen für die beiden folgenen Systeme in Regelungs- und Beobachtungsnormalform an.

a) $\dfrac{s^2-5}{s^2(s^2-1)}$ (Regelung eines stehenden Pendels durch eine Kraft auf den Wagen)

b) $\dfrac{3s+5}{s^2+2s+2}$

Aufgabe 3: Regelungs- und Jordannormalform ([FPE10, Aufg. 7.3])

Bestimmen Sie die Matrizen der Zustandsgleichungen in Regelungs- und Jordannormalform für folgende Systeme:

a) $\dfrac{1}{10s+1}$

b) [1] $\dfrac{5(s/2+1)}{s/10+1}$

[1] *Hinweis:* Formen Sie um in $a + \dfrac{b}{s/10+1}$

c) $\dfrac{2s+1}{s^2+3s+2} = \dfrac{3}{s+2} - \dfrac{1}{s+1}$

d) $\dfrac{s+3}{s(s^2+2s+2)} = \dfrac{3}{2\,s} - \dfrac{\frac{3\,s}{2}+2}{s^2+2\,s+2}$

e) $\dfrac{s^3+6s^2+11s+6}{s^3+15s^2+74s+120} = \dfrac{24}{s+5} - \dfrac{3}{s+4} - \dfrac{30}{s+1} + 1$

f) $\dfrac{1}{(s+2)^3} + \dfrac{s+3}{s^2+4s+5} + \dfrac{5}{s+4}$ (nur Jordannormalform)

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

Lösung 1:

(1) Es gibt unendlich viele Zustandsraumdarstellungen zu einer Übertragungsfunktion.

(2) Die Jordanform wird für die Systemanalyse genutzt.

(3) Die Modalform ist ein Spezialfall (alle Pole sind einfach und reell) der Jordanform. In der Jordanform führen mehrfache und/oder konjugiert komplexe Pole auf eine Blockdiagrammstruktur.

Lösung 2:

a) $$\boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_\mathrm{c} = 0$$

$$\boldsymbol{A}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_\mathrm{o} = 0$$

b) $$\boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}, D_\mathrm{c} = 0$$

$$\boldsymbol{A}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D_\mathrm{o} = 0$$

Lösung 3:

a) $\boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \end{bmatrix}$, $D_\mathrm{c} = 0$, Jordannormalform ist identisch zur Regelungsnormalform

b) $\boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} -10 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{C}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} -200 \end{bmatrix}$ $D_\mathrm{c} = 25$, Jordannormalform ist identisch zur Regelungsnormalform

c) $$\boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D_\mathrm{c} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

d) $$\boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_\mathrm{c} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \quad \boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right] \quad \boldsymbol{C} = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{3}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \quad D = 0$$

e) $\boldsymbol{A}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -120 & -74 & -15 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{C}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} -114 & -63 & -9 \end{bmatrix}$ $D_\mathrm{c} = 1$

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 24 & -3 & -30 \end{bmatrix}$ $D = 1$

f) $\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$ $\boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right]$ $\boldsymbol{C} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$ $D = 0$