

10 Zustandsraumdarstellung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 6. Februar 2015, 10:51

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Blockdiagramme und Zustandsdarstellung	2
3	Zustandsraumdarstellung → Übertragungsfunktion	4
3.1	Berechnung mit Matrixinversion	4
3.2	Berechnung mit verallgemeinerter Systemmatrix $P(s)$	6

1 Einleitung

Zusätzlich zu den beiden bislang behandelten Domänen *s-Ebene* (*Wurzelortskurve*) und *Frequenzgang* (*Bode-Diagramm* und *Nyquist-Diagramm*) gibt es wie in Skript ③ erwähnt die *Zustandsraum-Methoden*, um die es heute und den folgenden Terminen gehen wird. Das Ziel bleibt weiterhin das Gleiche: einen Regler $D(s)$ wie in Lücke 1 zu entwerfen.



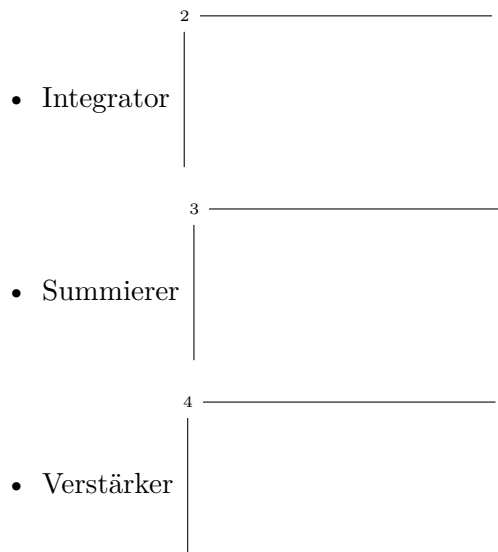
Die Bewegung eines mechanischen Systems (Differentialgleichung 2. Ordnung oder bei gekoppelten Systemen höherer Ordnung) lässt sich als ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung ausdrücken. Dies wird *Zustandsraumdarstellung* genannt.

2 Blockdiagramme und Zustandsdarstellung

Eine Möglichkeit die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u && \text{Systemgleichung} && (1a) \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du && \text{Messgleichung} && (1b) \\ \mathbf{x}(0) &= 0 && && (1c) \end{aligned}$$

zu verstehen, ist mit Hilfe von Blockdiagrammen, die nur Blöcke enthalten, die mit einem Analog-Computer realisierbar sind. Das sind



Beispiel:¹ Bestimme eine Zustandsraumdarstellung für die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$$

¹Entspricht [FPE10, Example 7.7, Seite 440] mit dem Unterschied, dass wir die Zustandsvariablen anders nummerieren.

Lösung: Wir lösen nach der höchsten Ableitung auf

5

Jetzt nehmen wir an, dass wir \ddot{y} kennen und damit die Terme niedrigerer Ordnung durch Integratoren bestimmen können:

6

Wir wenden Lücke 5 an und kommen dann zum vollständigen Blockdiagramm:

7

Um zur Zustandsraumdarstellung zu kommen, definieren wir die Zustandsgrößen einfach als Ausgang der Integratoren:

8

Im Blockdiagramm in Lücke 7 können wir also einfach die Terme mit y entsprechend umbenennen und erhalten dann:

9

Dies liefert schließlich die Zustandsraumdarstellung mit den Matrizen

10

3 Zustandsraumdarstellung \rightarrow Übertragungsfunktion²

3.1 Berechnung mit Matrixinversion

Aus einer Zustandsraumdarstellung (1) eines Systems lässt sich die Übertragungsfunktion $Y(s)/U(s)$ wie folgt bestimmen:

1. Laplace-Transformation:

11

2. Systemgleichung im Bildbereich nach dem transformierten Zustandsvektor

12

auflösen,

13

3. in die Messgleichung $Y(s)$ im Bildbereich einsetzen,

14

4. und schließlich durch $U(s)$ teilen:

15

²siehe auch [FPE10, Kapitel 7.4.2]

Die Abbildung *Zustandsraumdarstellung* \rightarrow *Übertragungsfunktion* ist eindeutig. Es gibt genau eine Übertragungsfunktion zu einer Zustandsraumdarstellung.

Beispiel:³ Finde die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

mit dem Zusammenhang in Lücke 15.

Lösung: Wir bilden zunächst

16

und berechnen dann

17

Dies in die Gleichung in Lücke 15 eingesetzt ergibt schließlich:

18

³[FPE10, Example 7.12, Seite 455f]

3.2 Berechnung mit verallgemeinerter Systemmatrix $P(s)$

Aus der Laplace-Transformation der System- und Messgleichung in Lücke 11 folgen die beiden Gleichungen

19

|

Diese beiden Gleichungen lassen sich in der Form

20

|

darstellen. Die Matrix $P(s)$ in Lücke 20 wird als verallgemeinerte Systemmatrix oder oft auch als Rosenbrock-Matrix bezeichnet, siehe [Unb07, Seite 14]. Es lässt sich zeigen (siehe zum Beispiel [Hüt00]), dass für die Determinante von $P(s)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 |P(s)| &= \begin{array}{c} 21 \\ | \\ 22 \\ | \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} | \\ | \end{array}
 \end{aligned}$$

Schreibt man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

in die Form

23

|

dann erkennt man, dass die Übertragungsfunktion auch durch die Beziehung

24

|

einfach berechnet werden kann. Um die Übertragungsfunktion aus der Zustandsraumdarstellung zu bestimmen, ist also *keine* Matrixinversion notwendig.

Aufgabe: Bestimme die Übertragungsfunktion des obigen Beispiels mit Hilfe der Rosenbrockmatrix $P(s)$.

25

Literatur

- [FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.
- [Hüt00] Hütte. *Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*. Hrsg. von H. Czichos. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [Unb07] Heinz Unbehauen. *Regelungstechnik II*. 9. Auflage. Vieweg Verlag, 2007.