

# 17 Diskrete Systeme

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 16. April 2015, 13:54

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Dynamische Analyse diskreter Systeme</b>	<b>2</b>
2.1	$z$ -Transformation . . . . .	2
2.1.1	Zusammenhang zwischen $s$ und $z$ . . . . .	3
2.1.2	$z$ -Übertragungsfunktion . . . . .	3
2.2	Inverse $z$ -Transformation . . . . .	4
2.2.1	Korrespondenztabellen . . . . .	4
2.2.2	Polynomdivision . . . . .	5
2.3	Endwertsatz der $z$ -Transformation . . . . .	6
2.4	$z$ -Übertragungsfunktion von Abtastsystemen . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Reglerentwurf durch diskrete Äquivalente</b>	<b>9</b>

### 1 Einleitung

Wir sind bisher implizit davon ausgegangen, dass unser Regelsystem, also Regler und Beobachter, kontinuierlich wirkt. Das heißt, es wäre streng genommen nur mit <sup>1</sup> Elektronik realisierbar. Wir werden hier die kennengelernten Methoden (klassisch und Zustandsraum) erweitern, um Regler zu entwerfen, die mit digitalen Computern implementiert werden.

### 2 Dynamische Analyse diskreter Systeme ([FPE10, Kapitel 4.4 und Kapitel 8.2])

Die  $z$ -Transformation ist das mathematische Werkzeug, um lineare diskrete Systeme zu analysieren. Sie spielt dieselbe Rolle wie die Laplace-Transformation für kontinuierliche Systeme.

#### 2.1 $z$ -Transformation

Die Laplace-Transformation ist definiert als

$$2 \frac{\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt}{F(s)}$$

was direkt zur wichtigen Eigenschaft (mit Anfangsbedingungen gleich Null)

$$3 \frac{F(s)}{s} = \int_0^{\infty} f(t) dt$$

führt. Das ermöglicht es uns, leicht die Übertragungsfunktion eines linearen kontinuierlichen Systems zu finden, wenn die Differentialgleichungen des Systems gegeben sind.

Für diskrete Systeme ist eine ähnliche Vorgehensweise verfügbar. Die  $z$ -Transformation ist definiert als

$$4 \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}}{F(z)}$$

wobei  $f(k)$  die abgetastete Version von  $f(t)$  ist, wie in Abbildung 1 gezeigt. Die Werte

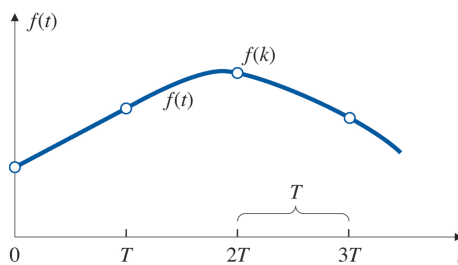


Abbildung 1: Eine kontinuierliche, abgetastete Version des Signals  $f$  ([FPE10, Abb. 8.3])

5 beziehen sich auf die diskreten Abtastzeitpunkte 6 .

**2.1.1 Zusammenhang zwischen  $s$  und  $z$**

Ein abgetastetes kontinuierliches Signal  $f(t)$  lässt sich auch als Folge gewichteter Dirac-Impulse darstellen:

7 \_\_\_\_\_  
 |

Durch Laplace-Transformation erhält man daraus die komplexe Funktion

8 \_\_\_\_\_  
 |

Mit Lücke 4 folgt somit <sup>9</sup> \_\_\_\_\_ womit die  $s$ -Ebene eindeutig und *nichtlinear* auf die  $z$ -Ebene abgebildet wird. Die linke komplexe  $s$ -Halbebene wird wegen

10 \_\_\_\_\_  
 |

in das Innere des <sup>11</sup> \_\_\_\_\_ abgebildet; die Stabilitätsgrenze in der  $z$ -Ebene ist somit

12 \_\_\_\_\_  
 |

**2.1.2  $z$ -Übertragungsfunktion**

Lücke 4 führt mit  $f(\beta T) = 0$  für  $\beta < 0$  direkt zu einem Zusammenhang analog zu Lücke 3:

13 \_\_\_\_\_  
 |

Beweis:

14

---

Dieser Zusammenhang erlaubt es uns, die Übertragungsfunktion eines diskreten Systems aus dessen Differenzgleichung zu bestimmen. Zum Beispiel lässt sich die allgemeine Differenzgleichung zweiter Ordnung

15

---

zur  $z$ -Transformierten der Variablen  $y(k), u(k), \dots$  konvertieren, indem Lücke 13 angewandt wird:

16

---

Dies führt dann zur diskreten Übertragungsfunktion

17

---

## 2.2 Inverse $z$ -Transformation

### 2.2.1 Korrespondenztabelle

Tabelle 3 ordnet einfache zeitdiskrete Funktionen zu ihren  $z$ -Transformierten zu. In Tabelle 4 sind zusätzlich zur  $z$ -Transformierten die Laplace-Transformierte für die selben Zeitfunktionen angegeben. Wie bei der inversen Laplace-Transformation lässt sich mit Hilfe der Partialbruchzerlegung eine allgemeine  $z$ -Transformierte in Partialbrüche zerlegen, die man dann in der Tabelle 3 und/oder in Tabelle 4 findet.

### 2.2.2 Polynomdivision

Ein Verfahren zur Invertierung der  $z$ -Transformation, für das es kein Gegenstück im Kontinuierlichen gibt, ist die Polynomdivision. Gegeben sei die  $z$ -Transformierte

18

|

dann dividieren wir einfach den Zähler durch den Nenner mit Hilfe der Polynomdivision. Das Ergebnis ist eine Reihe (möglicherweise mit unendlich vielen Termen) in  $z^{-1}$ , von der die Zeitreihe mit Hilfe von Lücke 4 bestimmt werden kann.

Beispiel:

- System 1. Ordnung: |

19

⇒ diskrete Übertragungsfunktion |

20

- Eingang sei Einheitsimpuls, definiert als |

21

⇒ |

22

- Polynomdivision: |

23

⇒ |

24

⇒ Zeitreihe |

25

### 2.3 Endwertsatz der $z$ -Transformation

Der Endwertsatz für kontinuierliche Systeme ist (siehe Tabelle 2 )

26

Die Laplace-Transformation einer Konstanten  $A$  mal Einheitssprung ist  $\frac{A}{s}$ , was zur Multiplikation mit  $s$  in Lücke 26 führt. Für diskrete Systeme ist die Antwort auf den Einheitssprung

27

daher ist der Endwertsatz für diskrete Systeme

28

falls alle Pole von

29

innerhalb des Einheitskreises sind.

Beispiel: Um den stationären Wert der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{0.58(1+z)}{z+0.16}$$

zu finden, setzen wir  $u(k) = 1$  für  $k \geq 0$ , so dass

30

Aus dem Endwertsatz folgt

31

Wir können also einfach <sup>32</sup> einsetzen und erhalten dann die stationäre Verstärkung. Der Stationärwert ist unabhängig von der Repräsentation des Systems, ob diskret oder kontinuierlich, somit kann man damit überprüfen, ob ein diskreter Regler oder ein diskretes Modell dem kontinuierlichen Regler oder System entspricht. Weitere Eigenschaften der  $z$ -Transformation sind in Tabelle 1 aufgelistet.

## 2.4 $z$ -Übertragungsfunktion von Abtastsystemen

Für die Ableitung des Zusammenhanges zwischen der Übertragungsfunktion eines kontinuierlichen Systems und der Übertragungsfunktion des zugehörigen zeitdiskreten Systems wird der folgende Abtastregelkreis betrachtet:

33

---

Abtastregelkreise werden zweckmäßigerweise als zeitdiskrete Systeme analysiert und synthetisiert, indem man der kontinuierlichen Regelstrecke  $G(s)$  ein äquivalentes zeitdiskretes System  $G(z)$  zuordnet. Zu diesem Zweck werden der A/D- und der D/A-Umsetzer durch ideale Tasting und ein Halteglied ersetzt und mit der Regelstrecke zusammengefasst:

34

---

Gesucht ist nun das Übertragungsverhalten des äquivalenten zeitdiskreten Systems, das aus einer Reihenschaltung von Halteglied und kontinuierlicher Regelstrecke besteht. Zunächst wird die Antwort des Haltegliedes 0-ter Ordnung auf einen Dirac-Impuls, also die Gewichtsfunktion des Haltegliedes, betrachtet:

- Gewichtsfunktion des Halteglieds im Zeitbereich (Rechteckimpuls, Breite  $T$ , Höhe 1):

35

|

- Gewichtsfunktion des Halteglieds im Laplace-Bildbereich:

36

|

- Reihenschaltung Halteglied und Regelstrecke:

37

|

- Rücktransformation in den Zeitbereich:

38

|

- Ideale Abtastung  $t = kT$ :

39

|

- $z$ -Transformation und Anwendung des Rechtsverschiebungssatzes ergibt schließlich

40

|

Die  $z$ -Übertragungsfunktion der Reihenschaltung eines Haltegliedes 0-ter Ordnung und eines kontinuierlichen Systems erhält man somit wie folgt: Zunächst wird der Ausdruck  $\frac{G(s)}{s}$



(Sprungantwort des kontinuierlichen Systems) mit Hilfe z.B. der Korrespondenztabelle in den  $z$ -Bereich transformiert. Anschließend wird der so erhaltene  $z$ -Ausdruck noch mit  $\frac{z-1}{z}$  oder  $(1-z^{-1})$  multipliziert.

### 3 Reglerentwurf durch diskrete Äquivalente [FPE10, Kapitel 8.3]

Der Entwurf durch das diskrete Äquivalent, auch Emulation genannt, verläuft in folgenden Stufen:

1. Entwerfe einen kontinuierlichen Regler.
2. Diskretisiere den kontinuierlichen Regler.
3. Nutze diskrete Analyse, Simulation oder Versuch um den Entwurf zu verifizieren.

Zur Diskretisierung einer kontinuierlichen Übertragungsfunktion gibt es verschiedene Approximationsmöglichkeiten. Die einfachste Möglichkeit haben wir im vorigen Kapitel kennengelernt (Halteglied 0-ter Ordnung). Interpoliert man linear zwischen den Zeitschritten ergibt sich zum Beispiel die Trapezregel mit der Substitution:

---

<sup>41</sup>

#### Literatur

- [FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

## Anhang

Tabelle 1: Rechenregeln für die  $z$ -Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) \circ \bullet c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$
Ähnlichkeitssatz	$a^k f(k) \circ \bullet F\left(\frac{z}{a}\right)$
Rechtsverschiebung	$f(k-n) \circ \bullet z^{-n} F(z)$
Linksverschiebung	$f(k+n) \circ \bullet z^n F(z) - z^n \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{-\ell} f(\ell)$
Differenzsatz	$\Delta f(k) = f(k) - f(k-1) \circ \bullet \frac{z-1}{z} F(z)$
Summensatz	$f_{\Sigma}(k) = \sum_{i=0}^k f(i) \circ \bullet \frac{z}{z-1} F(z)$
Faltungssatz	$\sum_{i=0}^{\infty} f_1(k-i) f_2(i) \circ \bullet F_1(z) \cdot F_2(z)$
Dämpfungssatz	$e^{-akT} f(k) \circ \bullet F(e^{-aT} z)$
Anfangswertsatz	$f(0+) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
Endwertsatz	$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} ((1-z^{-1})F(z))$

Tabelle 2: Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \circ \bullet c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$f(t - T_t) \circ \bullet F(s)e^{-sT_t}$
Dämpfungssatz	$e^{-at} f(t) \circ \bullet F(s + a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{df(t)}{dt} \circ \bullet sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \circ \bullet s^2 F(s) - sf(0) - \left. \frac{df}{dt} \right _0$
$n$ -fache Differentiation	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ \bullet s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \left. \frac{d^{i-1} f}{dt^{i-1}} \right _0$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \circ \bullet F_1(s) \cdot F_2(s)$
Anfangswertsatz	$f(0+) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} (sF(s))$
Endwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))$

Tabelle 3: Einige Korrespondenzen der  $z$ -Transformation

Nr.	$f(k)$	$F(z)$
1	$\delta_{k,0} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$	1
2	$\delta_{k-k_0,0} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = k_0 \\ 0 & \text{für } k \neq k_0 \end{cases}$	$z^{-k_0}$
3	$h(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$
4	$k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
5	$k^2$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$a^k$	$\frac{z}{z-a}$
7	$a^k k$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
8	$a^k k^2$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
9	$1 - a^k$	$\frac{z(1-a)}{(z-1)(z-a)}$

Tabelle 4: Laplace- und  $z$ -Transformierte einfacher diskreter Zeitfunktionen

Nr.	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1	$\frac{1}{s}$	$h(kT) = 1(kT) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \geq 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	$kT$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
4	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-akT}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
5	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kTe^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
6	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2 e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2} e^{-aT} z \frac{z+e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^3}$
7	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
8	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\cos \omega_0 kT$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - (2 \cos \omega_0 T)z + 1}$
9	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sin \omega_0 kT$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - (2 \cos \omega_0 T)z + 1}$
10	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-akT} \cos \omega_0 kT$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos \omega_0 T)z + e^{-2aT}}$
11	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-akT} \sin \omega_0 kT$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos \omega_0 T)z + e^{-2aT}}$