

# 16 Optimale Zustandsschätzung: Kalman-Filter

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 2. April 2015, 11:16



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

## Aufgabe 1: Reviewfragen

- Was ist der Unterschied zwischen Kalman-Filter und Beobachter?
- Was bedeuten beim Kalman-Filter die Matrizen  $P$ ,  $Q$  und  $R$ ?
- Unter welchen Bedingungen konvergiert die Matrix-Riccati-DGL für beliebige, positiv-semidefinite  $P(0)$  zu einer positiv-semidefiniten konstanten Lösung  $P(\infty)$ ?
- Wie lässt sich mit dem Matlab-Befehl  $[K,P] = \text{LQR}(A,B,Q,R)$  ein Kalman-Filter entwerfen?
- Wie lässt sich im Allgemeinen bei einem *nicht* beobachtbaren und *nicht* steuerbaren System feststellen, ob es detektierbar und stabilisierbar ist?

## Aufgabe 2: Detektierbarkeit und Stabilisierbarkeit

Prüfen Sie, ob sich für das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{w} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + v\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1], \quad \mathbb{E}(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ein stabiler, zeitinvarianter Kalman-Filter entwerfen lässt.

**Aufgabe 3: Entwurf eines skalaren Kalman-Filters**

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + bu + w & a &\neq 0 \\ y &= cx + v & c &\neq 0 \end{aligned}$$

Das Prozessrauschen und das Messrauschen haben die Varianz  $q > 0$  und  $r > 0$ . Bestimmen Sie die optimale Rückführung  $L$  des zeitinvarianten Kalman-Filters

$$\dot{\hat{x}} = a\hat{x} + bu + L(y - c\hat{x}).$$

**Aufgabe 4: Entwurf eines Kalman Filters**

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \\ y &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + v(t) \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{H} = [1 \ 0]$ , sowie den Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}$  und  $R$  des Prozessrauschens  $\mathbf{w}(t)$  und des Messrauschens  $v(t)$  respektive.

- a) Die Kovarianzmatrizen seien  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  und  $R = 1$ . Entwerfen Sie ein zeitinvariantes Kalman-Filter für das gegebene System, indem sie die optimale Rückführmatrix  $\mathbf{L}$  für einen Beobachter der Form

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})$$

berechnen.

- b) Wie ändert sich die Rückführmatrix  $\mathbf{L}$  in den folgenden Szenarien:

- i)  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  und  $R = 10^3$  (sehr hohes Messrauschen)
- ii)  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  und  $R = 10^{-3}$  (sehr niedriges Messrauschen)

Berechnen Sie die optimale Rückführmatrix  $\mathbf{L}$  und die Eigenwerte der Fehlerdynamik  $\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H}$  für beide Fälle. Wie sieht die Rückführmatrix  $\mathbf{L}$  in den beiden Fällen aus und warum? Wie verhalten sich die Eigenwerte der Fehlerdynamik im Vergleich zu den Eigenwerten von  $\mathbf{F}$  in den beiden Fällen und wie lässt sich dies erklären?

**Aufgabe 5:**

Beim Entwurf eines zeitinvarianten Kalman-Filters für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{w}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + v$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

ergibt die Lösung der Matrix-Riccati-DGL

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Bestimmen sie  $\mathbf{P}$  sowie die Rückführmatrix  $\mathbf{L}$ .