

# 14 Übungen zu Regelung im Zustandsraum Teil 2

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 19. März 2015, 11:32



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

## Aufgabe 1: Integralregelung [FPE10, Aufgabe 7.56]

Das linearisierte Modell eines Luftlagers ist  $\ddot{x} - x = u + w$ , wobei  $w$  eine systematische Abweichung (Bias) ist.

- Entwerfen Sie eine Integralregelung mit  $\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3]$ , so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises bei  $-1$  und  $-1 \pm i$  liegen und die bleibende Regelabweichung durch  $w$  bei einer Sprungantwort Null ist. Der Ausgang sei  $y = x$  und der Referenzeingang  $r = y_{\text{ref}}$  sei eine Konstante.
- Zusatzaufgaben: Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit dem Matlab-Befehl `place`. Plotten Sie mit dem Matlab-Befehl `lsim` die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises und nach  $t = 8\text{s}$  die Antwort auf einen Sprung im Bias-Eingang  $w$ .

## Aufgabe 2: Beobachterentwurf

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -10x_1 - 2x_2 + 10u \\ y &= 4x_1\end{aligned}$$

Es kann nur der Zustand  $x_1$  gemessen werden, daher soll ein Beobachter mit der Beobachterverstärkungsmatrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$$

entworfen werden. Bestimmen Sie die Verstärkungen  $\ell_1$  und  $\ell_2$ , so dass die Pole des Beobachters bei  $-8$  liegen.

**Aufgabe 3: Regelung im Zustandsraum****Aufgabe 3.1: Zustandsregler**

Gegeben sei ein System mit den Zustandsraummatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

mit  $c_1, c_2 > 0$ . Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $c_1$  und  $c_2$  eine Zustandsrückführung

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises bei  $-2$  und  $-4$  liegen.

**Aufgabe 3.2: Referenzsystem**

Gegeben sei das System (1) mit  $c_1 = 2$  und  $c_2 = 0$  und die Reglerverstärkung  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$ . Wir betrachten den Regler

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + Nr$$

Bestimmen Sie  $N$ , so dass der Ausgang

$$y_r = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

dem Referenzwert  $r$  folgt.

**Aufgabe 3.3: Beobachter**

Der Zustand des Systems (1) mit  $c_1 = 2$  und  $c_2 = 0$  soll auf Basis des gemessenen Ausgangs

$$y_m = \mathbf{C}_m\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

geschätzt werden. Bestimmen Sie die Beobachtungsmatrix  $\mathbf{L}$ , so dass die Pole des Beobachters bei  $-10$  und  $-5$  liegen.

**Aufgabe 4: Kombination aus Zustandsregler und -beobachter****Aufgabe 4.1: [FPE15, Aufgabe 7.48]**

Ein bestimmter Prozess habe die Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{4}{s^2 - 4}$ .

- Bestimmen Sie  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  für dieses System in Beobachtungsnormalform.
- Wenn  $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ , bestimmen Sie  $\mathbf{K}$ , so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises bei  $s = -2 \pm 2i$  liegen.
- Bestimmen Sie  $\mathbf{L}$ , so dass die Pole des Beobachters bei  $s = -10 \pm 10i$  liegen.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion  $D_c$  des resultierenden Reglers.

**Aufgabe 4.2: [FPE15, Aufgabe 7.50]**

Nehmen Sie an, ein Gleichstrommotor mit dem Motorstrom  $u$  ist mit den Rädern eines Wagens verbunden, um die Bewegung eines umgedrehten Pendels auf dem Wagen zu regeln. Die linearisierten und normalisierten Bewegungsgleichungen für dieses System lassen sich in der Form

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \theta + v + u \\ \dot{v} &= \theta - v - u\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\theta &= \text{Winkel des Pendels} \\ v &= \text{Geschwindigkeit des Wagens}\end{aligned}$$

beschreiben.

- (a) Der Winkel  $\theta$  soll durch eine Rückführung der Form

$$u = -K_1\theta - K_2\dot{\theta} - K_3v$$

geregelt werden. Bestimmen Sie die Rückführ-Verstärkungen, so dass die resultierenden closed-loop-Pole bei  $-1$  und  $-1 \pm i\sqrt{3}$  liegen.

- (b) Nehmen Sie an, dass  $\theta$  und  $v$  gemessen werden. Konstruieren Sie einen Beobachter für  $\theta$  und  $\dot{\theta}$  in der Form

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{x})$$

mit  $\mathbf{x} = [\theta \quad \dot{\theta}]^T$  und  $y = \theta$ . Betrachten Sie  $v$  und  $u$  als bekannt. Bestimmen Sie  $\mathbf{L}$ , so dass beide Beobachterpole bei  $-2$  liegen.

- (c) Geben Sie die Übertragungsfunktion  $D_c$  des Reglers an (Hinweis:  $v = 0$  setzen).

- (d) Zusatzaufgaben:

- (i) Plotten Sie mit Matlab die Bodediagramme für den Regler  $D_c$  und den aufgeschnittenen Regelkreis. Bestimmen Sie für den aufgeschnittenen Regelkreis die Betrags- und die Amplitudenreserve.
- (ii) Plotten Sie mit dem Matlab-Befehl `lsim` die Systemantwort auf eine Anfangsbedingung  $\theta = 0.1$ .

**Aufgabe 4.3: Kombinierte Aufgabe RT1 und RT2 [FPE10, Aufgabe 7.51]**

Instabile Bewegungsgleichungen der Form

$$\ddot{x} = x + u$$

erscheinen in Situationen, in denen die Bewegung eines stehenden Pendels (zum Beispiel eine Rakete) geregelt werden muss.

- (a) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve für  $u = -Kx$  in Abhängigkeit von der skalaren Verstärkung  $K$ .
- (b) Betrachten Sie einen Regler der Form

$$U(s) = K \frac{s + a}{s + 10} X(s)$$

Bestimmen Sie  $a$  und  $K$  so, dass das System ein Steigzeit von  $t_r = 2$  s und nicht mehr als eine Überschwingweite von  $M_p = 25\%$  zeigt. Skizzieren Sie die Wurzelortskurve in Abhängigkeit von  $K$ .

- (c) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm für die Strecke ohne Regler.
- (d) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm für den aufgeschnittenen Regelkreis. Entwerfen Sie einen Zustandsregler, so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises am gleichen Ort in Aufgabenteil (b) sind.
- (e) Entwerfen Sie einen Beobachter für  $x$  und  $\dot{x}$  mit  $y = x$  als Messgröße. Bestimmen Sie die Beobachter-Verstärkung  $\mathbf{L}$  so, dass die Gleichung für  $\hat{\mathbf{x}}$  charakteristische Pole mit einer Dämpfungskonstante  $\zeta = 0.5$  und einer ungedämpften Eigenfrequenz  $\omega_n = 8$  hat.

### Literatur

- [FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.
- [FPE15] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 7th global edition. Pearson Prentice Hall, 2015.