13 Regelung im Zustandsraum Teil 1

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 13. November 2015, 9:09

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

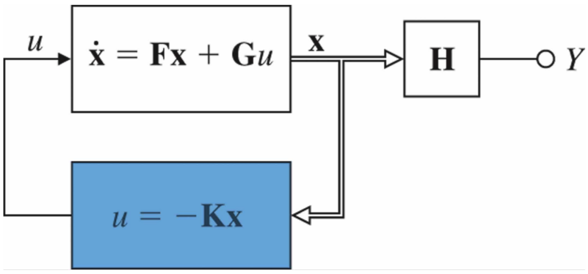


Abbildung 1: Angenommenes System für den Reglerentwurf.

1. Einen Regler bestimmen ([FPE10, Kapitel 7.5.1])

Der erste Schritt in der Zustandsraum-Methode ist es, eine Linearkombination des gesamten Zustandsvektors zurückzuführen. Die Idee ist also:

1 $\Rightarrow$ 2

Abbildung 1 zeigt das entsprechende Blockdiagramm. Aus Lücke 2 folgt die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises:

3

Wir entwerfen den Regler, indem wir die Elemente der Rückführmatrix $\boldsymbol{K}$ so wählen, dass die Pole des geschlossenen Regelkreises an passenden Stellen liegen.

1.1. Beispiel: Ungedämpfter Oszillator ([FPE10, Example 7.15])

Gegeben sei ein Oszillator mit der Frequenz ω_0 und folgender Zustandsraumdarstellung:

4

Wir wollen ein Regelgesetz finden, das die Pole 5 des offenen Regelkreises auf 6 des geschlossenen Regelkreises verschiebt. Die natürliche Frequenz soll also verdoppelt und die Dämpfung ζ von 0 auf 1 erhöht werden.[1] Das gesuchte charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises ist also

[1] Zur Erinnerung: Nenner der Schwingungsübertragungsfunktion: $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$

7

Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises ergibt mit Lücke 3

8

Der Koeffizientenvergleich zwischen Lücke 7 und 8 führt auf

9

Der Regler ist also kurz gefasst

10

Abbildung 2 zeigt die Impulsantwort des geschlossenen Regelkreises (entspricht der Anfangsbedingung $x_1 = 1$, $x_2 = 0$).

1.2. Rückführmatrix für Systeme in Regelungsnormalform

Die Rückführmatrix $\boldsymbol{K}$ lässt sich besonders einfach wählen, wenn das System in Regelungsnormalform vorliegt:

11

Wie wir schon wissen ist die charakteristische Gleichung hier

12

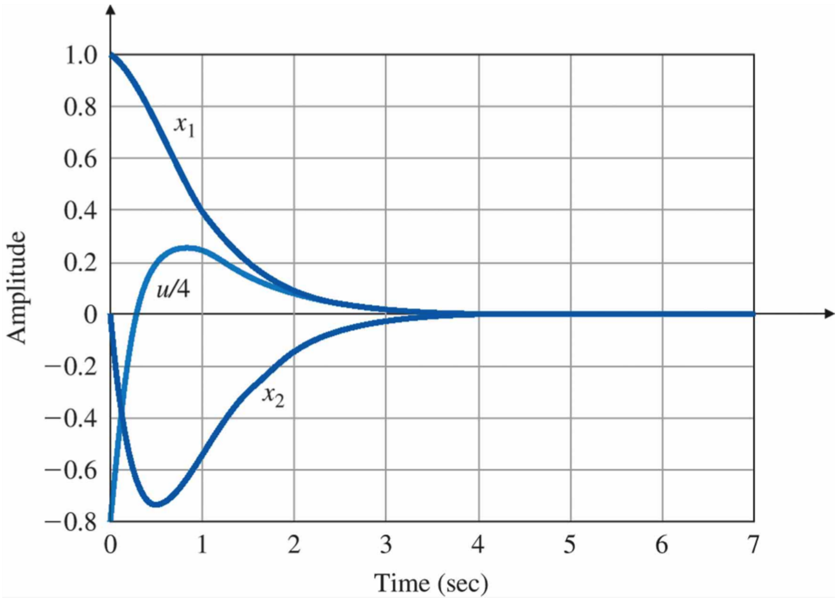


Abbildung 2: Impulsantwort des ungedämpften Oszillators mit vollständiger Zustandsrückführung ($\zeta = 0$, $\omega_0 = 1$). ([FPE10, Figure 7.13])

Für die Systemmatrix des geschlossenen Kreises gilt

13

Die charakteristische Gleichung ist somit

14

Wir schließen daraus:

> Für ein steuerbares System lassen sich die Pole durch die Wahl der Rückführmatrix $\boldsymbol{K}$ beliebig platzieren.

Beispiel: siehe oben (der Oszillator ist bereits in Regelungsnormalform, so dass man auch gleich die charakteristische Gleichung gemäß Lücke 14 hinschreiben kann.)

1.3. Einfluss von Nullstellen auf den Regler

Anhand des folgenden Systems (entspricht [FPE10, Example 7.17] mit umgekehrter Nummerierung der Zustände) mit einer Nullstelle bei $s = z_0$ untersuchen wir den Einfluss von Nullstellen auf den Regler. Gegeben sind die Systemmatrizen in Beobachtungsnormalform:

15

Gesucht ist die Zustandsrückführung, die die Pole des Systems auf die Wurzeln von

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \tag{1}$$

legt, also auf

16

$s_{1,2} =$

Die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises ist

17

Der Koeffizientenvergleich mit Gleichung (1) führt auf folgendes Gleichungssystem:

18

In Matrixschreibweise:

19

Lösung durch Matrixinversion:

20

Wir lernen zwei wichtige Erkenntnisse von diesem Beispiel:

1. Die Verstärkung nimmt zu, wenn sich die Nullstelle z_0 entweder -3 oder -4 nähert, den Werten, an denen dieses System seine Steuerbarkeit verliert. Mit anderen Worten, die Verstärkungen werden sehr groß wenn das System fast nicht mehr steuerbar ist.

   Das System muss für die Regelung immer „härter“ arbeiten je mehr die Steuerbarkeit verloren geht.

2. Dieses Beispiel zeigt auch, dass k_1 und k_2 beide mit der Bandbreite des geschlossenen Systems ω_n wachsen.

   Um Pole weit zu verschieben benötigt es große Verstärkungen.

2. Referenzsystem ([FPE10, Kapitel 7.5.2])

Soweit war der Regler gegeben durch $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$. Was war das Ziel dieses Reglers? (siehe zum Beispiel Abbildung 2):

21

Jetzt wollen wir mit Hilfe eines Referenzwerts r das Einschwingverhalten in Abhängigkeit der Pol-Platzierung untersuchen. Das bedeutet, wir geben r vor und im eingeschwungenen Zustand soll 22 gelten. Ein naheliegender Ansatz wäre $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + r$, der aber von Spezialfällen abgesehen zu einer bleibenden Regelabweichung führt. Im eingeschwungenen Fall gilt nämlich

23

Um dieses Problem der bleibenden Regelabweichung zu lösen, berechnen wir die stationären Werte des Zustands und des Eingangs, $\boldsymbol{x}_\mathrm{s}$ und u_s respektive, so dass die Regelabweichung im eingeschwungenen Zustand $e = y_\mathrm{s} - r = 0$ ist. Die Reglergleichung ist somit:

24

Wie müssen wir u_s und $\boldsymbol{x}_\mathrm{s}$ wählen? Die Zustandsgleichungen

25

reduzieren sich im stationären Fall $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\mathrm{s}$ und $y = y_\mathrm{s}$ zu

26

Wir suchen die Werte, für die $y_\mathrm{s} = r$ für einen beliebigen Wert von r ist. Den Ansatz

27

setzen wir in Lücke 26 ein und erhalten

28

Diese Gleichung lässt sich nach $\boldsymbol{N}_x$ und N_u auflösen:

29

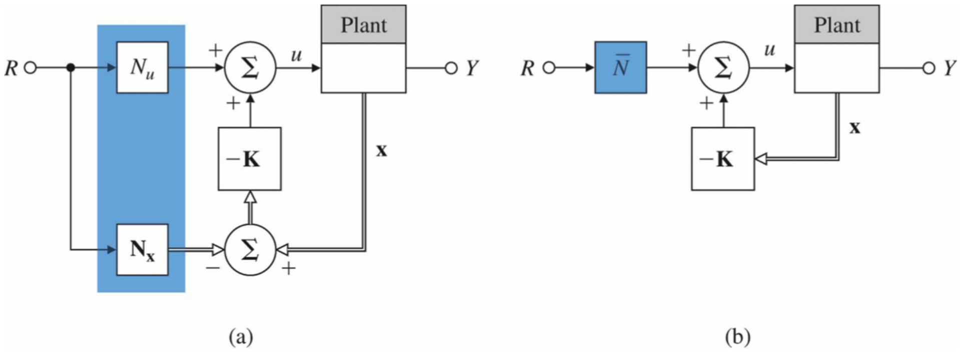


Abbildung 3: Blockdiagramm bei Berücksichtigung des Sollwerts bei der Zustandsrückführung ([FPE10, Figure 7.15])
(a) mit Zustands- und Regelungsverstärkung, siehe Gl. (2a)
(b) mit einer einzigen Verstärkung, siehe Gl. (2b)

Aus den Lücken 24 und 27 folgt:

30

$$u = \qquad \text{(2a)}$$

31

$$= \qquad \text{(2b)}$$

Damit haben wir schließlich den Regler, so dass bei einem Sprung auf r die bleibende Regelabweichung $e = 0$ wird. Abbildung 3 zeigt das Blockdiagramm des Systems.

2.1. Beispiel: Ungedämpfter Oszillator ([FPE10, Example 7.18])

Wir wollen die notwendigen Verstärkungen berechnen, so dass die bleibende Regelabweichung bei einem Sprung des Sollwinkels x_1 Null ist. Die Zustandsgleichungen sind mit $\omega_0 = 1$

32

Lösung: Die entsprechenden Matrizen in Lücke 28 einsetzen

33

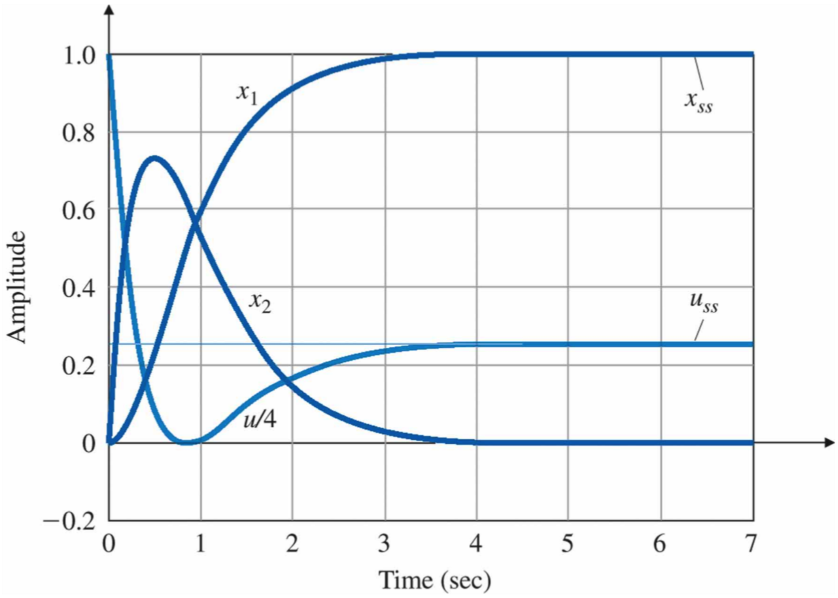


Abbildung 4: Sprungantwort des Oszillators auf einen Referenzeingang. ([FPE10, Figure 7.16])

und nach den Komponenten des Vektors $\boldsymbol{N}_x = \begin{bmatrix} n_{1,x} \\ n_{2,x} \end{bmatrix}$ und nach N_u auflösen:

34

Mit der Rückführmatrix $\boldsymbol{K}$ aus Lücke 10 mit $\omega_0 = 1$ ist dann

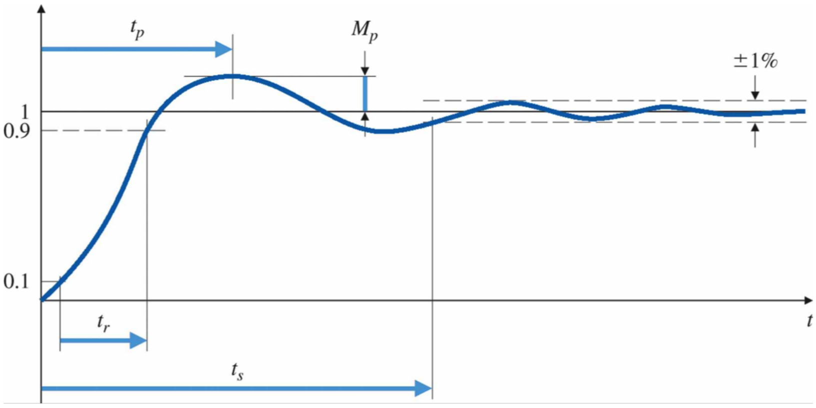
35

$\bar{N} =$

Abbildung 4 zeigt die resultierende Sprungantwort.

A. Kenngrößen im Zeitbereich

Zur Reglerauslegung benötigen wir noch die Formeln für die Kenngrößen der Sprungantwort im Zeitbereich, wie wir sie in Übung 4 hergeleitet haben (siehe auch [FPE10, Kapitel 3.4]):



[FPE10, Fig. 3.22]

1. Steigzeit / Anregelzeit (rise time) $t_\mathrm{r} \approx \dfrac{1.8}{\omega_\mathrm{n}}$
2. Einschwingzeit (settling time) $t_\mathrm{s} = \dfrac{4.6}{\zeta\omega_\mathrm{n}} = \dfrac{4.6}{\sigma}$
3. Überschwingweite (overshoot (peak - final value)) $M_\mathrm{p} = \mathrm{e}^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$, $0 \leq \zeta \leq 1$
4. Anstiegszeit (peak time) $t_\mathrm{p} = \dfrac{\pi}{\omega_\mathrm{n}\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{\pi}{\omega_\mathrm{d}}$

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.