

# 12 Übung zu Transformationen, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 3. Oktober 2015, 12:54



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

## Aufgabe 1: Review-Fragen

- Was bedeutet es, wenn ein System steuerbar / beobachtbar ist?
- Kann eine Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ , wobei Zähler- und Nennerpolynom  $b(s)$  und  $a(s)$  keine gemeinsamen Nullstellen haben, in Zustandsraumdarstellung *nicht* steuer- oder beobachtbar sein?
- Geben Sie ein steuerbares / beobachtbares System an, das nicht beobachtbar / steuerbar ist.
- Wozu lassen sich Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{O}$  nutzen?

## Aufgabe 2: Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit

Gegeben ist das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + u \\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

Ist das System steuerbar? Ist es beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 3: Transformation auf Regelungs- und Beobachtungsnormalform

- a) [FPE10, Aufgabe 7.6]: Gegeben sind die Zustandsmatrizen

$$\begin{aligned}F &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & J &= 0\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Transformation  $\mathbf{T}$  mit  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ , so dass die Zustandsmatrizen, die die Dynamik von  $\mathbf{z}$  beschreiben, in Beobachtungsnormalform sind. Berechnen Sie die Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$ .

- b) Transformieren Sie obiges System entsprechend in die Regelungsnormalform.

#### Aufgabe 4: Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit

Gegeben ist folgendes System in Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ 0.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} (1 + \alpha)/\sqrt{2} \\ 0 \\ (-1 + \alpha)/\sqrt{2} \end{bmatrix} u \quad (1a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (1b)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$  ist ein Parameter des Systems.

- a) Berechnen Sie die Beobachtbarkeitsmatrix und bestimmen Sie, ob das System beobachtbar ist.
- b) Berechnen Sie die Steuerbarkeitsmatrix und bestimmen Sie, für welche Werte von  $\alpha \in \mathbb{R}$  das System steuerbar ist.

#### Aufgabe 5: Zustandstransformation

Es ist eine Zustandstransformation des Systems (1) der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$$

gegeben, wobei  $\mathbf{z}$  den transformierten Zustand bezeichnet. Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  und ihre Inverse  $\mathbf{T}^{-1}$  sind wie folgt gegeben:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- a) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des transformierten Systems an. Welche Form liegt hier vor?
- b) Wie können Sie aus der transformierten Darstellung *ohne* Berechnung der Steuerbarkeits- und der Beobachtbarkeitsmatrix sofort auf die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit von System (1) schließen?
- c) Nehmen Sie nun den Fall  $\alpha = 0$  an. Welche Dimension besitzt der steuerbare Unterraum des Systems (1)?

**Literatur**

- [FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.