

11 Kanonische Formen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 25. Februar 2015, 8:59

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Regelungsnormalform	2
3	Beobachtungsnormalform	4
4	Modal- oder Jordanform	5

1 Einleitung¹

Es existieren *unendlich viele Realisierungen* zu einer Übertragungsfunktion, von denen die drei kanonischen Formen für uns interessant sind:

1. Regelungsnormalform für den Reglerentwurf
2. Beobachtungsnormalform für den Beobachterentwurf

¹siehe auch [FPE10, Kapitel 7.4.1]

3. Modal- oder Jordanform zur Systemanalyse

Hinweis: In [FPE10] werden, wie im angelsächsischen Raum und damit auch in MATLAB® üblich, die Zustände der Regelungs- sowie der Beobachtungsnormalform im Vergleich zu hier in umgekehrter Reihenfolge nummeriert!

2 Regelungsnormalform

Für eine Übertragungsfunktion $Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s) = \frac{b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}U(s)$ lässt sich die Regelungsnormalform bestimmen, indem wir die Zustandsvariablen x_i folgendermaßen (und damit auch die Systemgleichung) definieren:

1 _____
|

Somit gilt für die Zustandsvariablen im Bildbereich:

$\mathcal{L}\{x_i\} = \left| \begin{array}{l} 2 \text{ _____} \\ \end{array} \right. \tag{1}$

$\mathcal{L}\{\dot{x}_i\} = \left| \begin{array}{l} 3 \text{ _____} \\ \end{array} \right. \tag{2}$

Dies in die letzte Zeile in Lücke 1 eingesetzt und nach $\left| \begin{array}{l} 4 \text{ _____} \\ \end{array} \right.$ aufgelöst ergibt zunächst

5 _____
|

Gleichung (1) und Lücke 5 in die entsprechend umgeformte Übertragungsfunktion

6 _____
|

einsetzen ergibt im Bildbereich

7 _____
|

und schließlich zurück transformiert in den Zeitbereich ergibt sich für die Messgleichung

8

Die Regelungsnormalform der oben gegebenen Übertragungsfunktion ist somit

9

Beispiel: Bestimme die Regelungsnormalform der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10s^2 + 4s + 7}{s^3 + 3s^2 + 5s + 6}$$

sowie die entsprechende Blockdiagrammstruktur.

Regelungsnormalform:

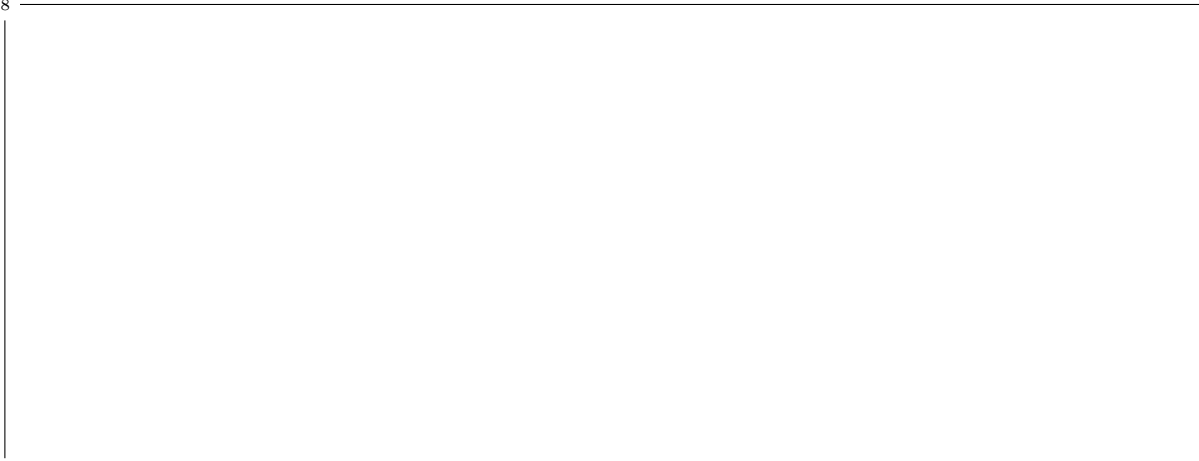
10

Blockdiagrammstruktur der Regelungsnormalform:

11

Blockdiagrammstruktur der Beobachtungsnormalform:

18



Die

Blockdiagrammstruktur der Beobachtungsnormalform zeigt, dass der

19

zu allen zurückgeführt wird.

20

zu allen

zurückgeführt wird.

4 Modal- oder Jordanform

Bei einfachen oder konjugiert komplexen Polen zerlegen wir die Übertragungsfunktion in Ihre Partialbrüche. Jeder Partialbruch entspricht dann einem Modus. Komplexe Polpare werden zu einem quadratischen Partialbruch zusammengefasst, der Modus ist dann in der 2×2 -Regelungsnormalform. Ein mehrfacher Pol $\frac{b}{(s-p)^m}$ führt ohne weitere Zerlegung zur $m \times m$ -Jordanform. Die Systemmatrix hat dann eine Blockdiagonalstruktur.

1. Alle Pole p_i sind reell und einfach, die Übertragungsfunktion in Partialbruch-Darstellung ist

dann

21

Einem Partialbruch

22

ordnen wir die Zustandsgleichung im Bildbereich

23

und damit im Zeitbereich

24

zu.

Die Messgleichung ist dann die Summe

25

Die Modalform für einfache reelle Pole hat somit folgende Form:

26

Beispiel: Bestimme die Modalform der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 7s + 12} =$$

27

sowie die entsprechende Blockdiagrammstruktur.

28

Blockdiagrammstruktur der Modalform (siehe auch [FPE10, Abb. 7.8, Seite 445]):

29

Dies lässt sich leicht zeigen, indem man im Bildbereich sukzessive die i -te Zeile nach X_i auflöst und in der $i + 1$ -ten Zeile für X_{i+1} einsetzt, beginnend bei $i = 1$. Die m -te Zeile ergibt dann $X_1 = \frac{1}{(s-p)^m}U$. Dies in die Messgleichung im Bildbereich eingesetzt ergibt dann die gegebene Übertragungsfunktion.

Aufgabe: Stellen Sie folgende Übertragungsfunktion in Jordannormalform dar³:

$$G(s) = \frac{2s + 4}{s^2(s^2 + 2s + 4)} =$$

Blockdiagrammstruktur der Jordannormalform (siehe auch [FPE10, Abb. 7.9, Seite 446, wobei die Reihenfolge der Zustände blockweise umgekehrt ist])

³Die Modalform ist ein Spezialfall (alle Pole sind einfach und reell) der Jordanform, so dass im allgemeinen Fall der Begriff *Jordanform* genutzt wird.

Literatur

- [FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.