10 Zustandsraumdarstellung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 25. Februar 2015, 8:58

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Zusätzlich zu den beiden bislang behandelten Domänen *s-Ebene (Wurzelortskurve)* und *Frequenzgang (Bode-Diagramm und Nyquist-Diagramm)* gibt es wie in Skript 3 erwähnt die *Zustandsraum-Methoden*, um die es heute und den folgenden Terminen gehen wird. Das Ziel bleibt weiterhin das Gleiche: einen Regler $D(s)$ wie in Lücke 1 zu entwerfen.

1

Die Bewegung eines mechanischen Systems (Differentialgleichung 2. Ordnung oder bei gekoppelten Systemen höherer Ordnung) lässt sich als ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung ausdrücken. Dies wird *Zustandsraumdarstellung* genannt.

2 Blockdiagramme und Zustandsdarstellung

Eine Möglichkeit die Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \qquad \text{Systemgleichung} \tag{1a}$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + Du \qquad \text{Messgleichung} \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = 0 \tag{1c}$$

zu verstehen, ist mit Hilfe von Blockdiagrammen, die nur Blöcke enthalten, die mit einem Analog-Computer realisierbar sind. Das sind

- Integrator 2
- Summierer 3
- Verstärker 4

Beispiel:[1] Bestimme eine Zustandsraumdarstellung für die Differentialgleichung

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

[1] Entspricht [FPE10, Example 7.7, Seite 440] mit dem Unterschied, dass wir die Zustandsvariablen anders nummerieren.

Lösung: Wir lösen nach der höchsten Ableitung auf

5

Jetzt nehmen wir an, dass wir $\dddot{y}$ kennen und damit die Terme niedrigerer Ordnung durch Integratoren bestimmen können:

6

Wir wenden Lücke 5 an und kommen dann zum vollständigen Blockdiagramm:

7

Um zur Zustandsraumdarstellung zu kommen, definieren wir die Zustandsgrößen einfach als Ausgang der Integratoren:

8

Im Blockdiagramm in Lücke 7 können wir also einfach die Terme mit y entsprechend umbenennen und erhalten dann:

9

Dies liefert schließlich die Zustandsraumdarstellung mit den Matrizen

10

3 Zustandsraumdarstellung → Übertragungsfunktion[2]

3.1 Berechnung mit Matrixinversion

Aus einer Zustandsraumdarstellung (1) eines Systems lässt sich die Übertragungsfunktion $Y(s)/U(s)$ wie folgt bestimmen:

1. Laplace-Transformation:

   11

2. Systemgleichung im Bildbereich nach dem transformierten Zustandsvektor 12 auflösen,

   13

3. in die Messgleichung $Y(s)$ im Bildbereich einsetzen,

   14

4. und schließlich durch $U(s)$ teilen:

   15

[2] siehe auch [FPE10, Kapitel 7.4.2]

Die Abbildung *Zustandsraumdarstellung* → *Übertragungsfunktion* ist eindeutig. Es gibt genau *eine* Übertragungsfunktion zu einer Zustandsraumdarstellung.

Beispiel:[3] Finde die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

mit dem Zusammenhang in Lücke 15.

Lösung: Wir bilden zunächst

16

und berechnen dann

17

Dies in die Gleichung in Lücke 15 eingesetzt ergibt schließlich:

18

[3] [FPE10, Example 7.12, Seite 455f]

3.2 Berechnung mit verallgemeinerter Systemmatrix $P(s)$

Aus der Laplace-Transformation der System- und Messgleichung in Lücke 11 folgen die beiden Gleichungen

19

Diese beiden Gleichungen lassen sich in der Form

20

darstellen. Die Matrix $\boldsymbol{P}(s)$ in Lücke 20 wird als verallgemeinerte Systemmatrix oder oft auch als Rosenbrock-Matrix bezeichnet, siehe [Unb07, Seite 14]. Es lässt sich zeigen (siehe zum Beispiel [Hüt00]), dass für die Determinante von $\boldsymbol{P}(s)$ gilt:

21

$$|\boldsymbol{P}(s)| =$$

22

$$=$$

Schreibt man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D$$

in die Form

23

dann erkennt man, dass die Übertragungsfunktion auch durch die Beziehung

24

einfach berechnet werden kann. Um die Übertragungsfunktion aus der Zustandsraumdarstellung zu bestimmen, ist also *keine* Matrixinversion notwendig.

Aufgabe: Bestimme die Übertragungsfunktion des obigen Beispiels mit Hilfe der Rosenbrockmatrix $P(s)$.

25

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

[Hüt00] Hütte. *Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*. Hrsg. von H. Czichos. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[Unb07] Heinz Unbehauen. *Regelungstechnik II*. 9. Auflage. Vieweg Verlag, 2007.