

# 8 Wurzelortskurve\*

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 29. Oktober 2015, 13:24

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

## Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
2 Konstruktionsregeln für Wurzelortskurven	3

### 1 Grundlagen

Das Wurzelortskurvenverfahren beantwortet nicht nur die Frage nach der Stabilität des *geschlossenen* Regelkreises, sondern gestattet darüber hinaus die Ermittlung der *Lage aller Pole* des geschlossenen Kreises, und zwar in Abhängigkeit von einem *reellen Parameter* (siehe auch *5 Erste Analyse des Regelkreises*.)

Wie beim Nyquist-Verfahren seien die Nullstellen und Pole des *offenen* Kreises bekannt. Ist  $L = \frac{b(s)}{a(s)}$  eine rationale Funktion von  $s$ , so besteht die Aufgabenstellung beim WOK-Verfahren darin, für die Funktion

---

1

\*[FPE10, Kapitel 5.1 und 5.2]

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Kreises

2

in Abhängigkeit von  $K \geq 0$  zu bestimmen. Hilfreich werden die folgenden drei äquivalenten Gleichungen sein, die alle dieselben Wurzeln wie die Gleichung in Lücke 2 haben:

3

4

5

Aus Lücke 1 und 2 folgt

6

Die komplexe Gleichung Lücke 6 lässt sich – ähnlich wie beim Nyquist-Verfahren – in zwei reelle Gleichungen zerlegen; nämlich in die Betragsbedingung

7

Aus Lücke 5 folgt mit  $\psi_i = \angle(s - z_i)$  und  $\phi_i = \angle(s - p_i)$  die Phasenbedingung

8

Die Phasenbedingung enthält den Parameter  $K$  *nicht*. Die *Menge der Lösungen* in Lücke 8 ist in der  $s$ -Ebene eine im Allgemeinen aus mehreren Zweigen bestehende Ortskurve, die sogenannte Wurzelortskurve WOK. Diese lässt sich also wie folgt definieren:

Die Gesamtheit aller komplexen Zahlen  $s$ , die die Phasenbedingung in Lücke 8 erfüllen, heißt *Wurzelortskurve*. Jedem Punkt der WOK wird durch die Betragsbedingung in Lücke 7 ein Wert des Parameters  $K$  zugeordnet.

Anschaulich formuliert sind die WOK diejenigen Kurven in der  $s$ -Ebene, längs derer die Wurzeln der charakteristischen Gleichung in Lücke 2 wandern, wenn man den Parameter  $K$  stetig von 0 bis  $\infty$  variiert. Darum gilt auch

Die Wurzelortskurven sind der geometrische Ort der Pole des geschlossenen Regelkreises.

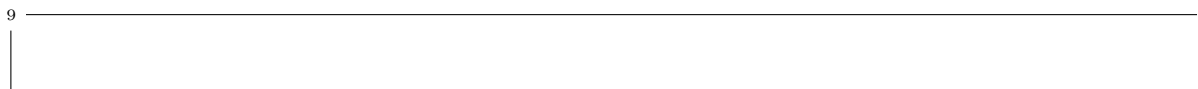
Der Parameter  $K$  ist in der Regel ein *Verstärkungsfaktor* (oder eine proportionale Größe). Es lassen sich aber auch Verzögerungszeiten  $T_K$ , Vorhaltezeiten  $T_d$  oder Nachstellzeiten  $T_i$  zu Parametern von Wurzelortskurven machen. Wesentlich ist nur, dass  $K$  *reell* ist.

## 2 Konstruktionsregeln für Wurzelortskurven

Zwar lassen sich bei Systemen höherer Ordnung die Wurzelortskurven im Allgemeinen nicht exakt analytisch ermitteln, jedoch gibt es eine Reihe wichtiger Eigenschaften und Kenngrößen der Wurzelortskurven, deren Kenntnis ein guter Anhaltspunkt für eine Skizze des prinzipiellen Verlaufs der Wurzelortskurven darstellt. Im Folgenden wird von realisierbaren Systemen, also  $n > m$ , ausgegangen.

REGEL 1 Die  $n$  Zweige der Wurzelortskurve *beginnen* in den *Polen* von  $L(s)$  und  $m$  dieser Zweige *enden* in den *Nullstellen* von  $L(s)$ .

Aus Lücke 4 folgt mit  $K = 0$



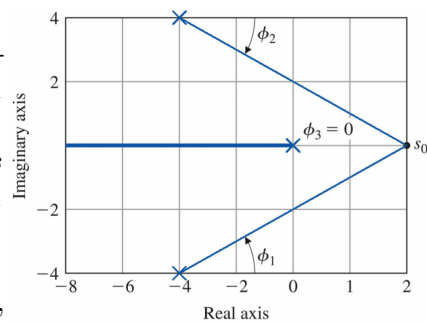
Die *Pole*  $s = p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sind also die *Anfangspunkte* der Wurzelortskurve. Wenn  $K$  gegen Unendlich geht, muss  $s$  eine von folgenden Bedingungen erfüllen:



Die *Nullstellen*  $s = z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) sind also  $m$  *Endpunkte* der WOK. Außerdem laufen  $n - m$  Zweige der WOK zum *unendlich fernen Punkt*, siehe Regel 3. (Der Punkt  $s = \infty$  ist eine  $n - m$ -fache Nullstelle von  $KL(s)$ . Nach dieser Definition hat  $KL(s)$  ebensoviele Nullstellen wie Pole.)

REGEL 2 Ein Punkt der reellen Achse ist genau dann ein *Punkt der Wurzelortskurve*, wenn die Summe aller reellen Nullstellen und Pole des offenen Kreises, die *rechts* vom betrachteten Punkt liegen, *ungerade* ist.

Betrachten wir einen reellen Testpunkt, wie zum Beispiel  $s_0$  in nebenstehender Abbildung, dann sehen wir, dass die Winkel von konjugiert komplexen Pol- oder Nullstellenpaaren auf der linken Seite der Phasenbedingung (8) sich paarweise kompensieren. Die Winkel von reellen Polen und Nullstellen sind Null, wenn der Testpunkt *rechts* und  $\pi$  wenn der Testpunkt *links* von reellen Polen und Nullstellen liegt. Damit sich in Summe der erforderliche



[FPE10, Fig. 5.5]

Winkel <sup>11</sup> (siehe Lücke 8) ergibt, muss also der Testpunkt links von einer ungeraden Anzahl von reellen Polen und Nullstellen liegen.

REGEL 3 Für große  $s$  und  $K$  haben  $n - m$  Zweige *Asymptoten* mit den Winkeln  $\phi_l$ , die sternförmig von dem Polschwerpunkt  $s = \alpha$  auf der reellen Achse ausgehen:

12

---

Herleitung siehe Anhang und [FPE10, Kapitel 5.2.1]

REGEL 4  $q$  Zweige beginnen in  $q$ -fachen Polen unter den Winkeln

13

---

und  $q$  Zweige enden in  $q$ -fachen Nullstellen unter den Winkeln

14

---

Herleitung siehe [FPE10, Kap. 5.2.1].

REGEL 5 Der Winkel eines Zweigs in einem *Verzweigungspunkt* (siehe Regel 6), also einem  $q$ -fachen Pol der charakteristischen Gleichung  $1 + KL(s) = 0$ , in dem sich  $q$  Zweige schneiden, ist

15

---

Der Betrag des *Schnittwinkels* zweier *benachbarter* Kurvenstücke (pro Zweig gibt es zwei Kurvenstücke) in einem Verzweigungspunkt ist daher

16

---

Herleitung siehe [FPE10, Kap. 5.2.1].

REGEL 6 Die (von den Polen und Nullstellen verschiedenen) *Verzweigungspunkte* sind mehrfache Nullstellen der charakteristischen Gleichung. Es gilt also

17

---

Für die Ableitung ergibt sich mit der Quotientenregel

18

Für die Ableitungen  $a'(s)$  und  $b'(s)$  lässt sich die Produktregel

$$\frac{d}{ds} \left( (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_k) \right) = \sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (s - \lambda_j)$$

anwenden, so dass sie sich in Lücke 18 kürzen lassen. Es ergibt sich damit die allgemeine Gleichung zur Berechnung der Verzweigungspunkte:

19 \_\_\_\_\_  
 |

oder

20 \_\_\_\_\_  
 |

REGEL 7 Ist  $s$  eine *reelle Verzweigungsstelle*, so lässt sich  $s = \sigma$  setzen.

- a) Ist  $s_\lambda$  eine *reelle* kritische Stelle, so setzen wir  $s_\lambda = \sigma_\lambda$  und der zugehörige Partialbruch lautet

21 \_\_\_\_\_  
 |

- b) Ist  $s_\lambda = \sigma_\lambda + i\omega_\lambda$  nicht reell, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl  $s_{\lambda+1} = \bar{s}_\lambda = \sigma_\lambda - i\omega_\lambda$  eine kritische Stelle. Aus den beiden zugehörigen Partialbrüchen ergibt sich dann

22 \_\_\_\_\_  
 |

Für  $\omega_\lambda = 0$  geht Lücke 22 in Lücke 21 über.

Somit erhalten wir die (von den Nullstellen und Polen des offenen Kreises verschiedenen) Verzweigungspunkte der Wurzelortskurve auf der *reellen Achse* aus der Gleichung

23 \_\_\_\_\_  
 |

durch Auflösen nach  $\sigma$ . Sind alle kritischen Stellen  $s_\lambda$  reell, so hat man die einfachere Gleichung

24 \_\_\_\_\_  
 |

REGEL 8 WOK verlaufen stets <sup>25</sup> | \_\_\_\_\_ zur  $\sigma$ -Achse, weil alle Wurzeln reell sind, oder konjugiert komplexe Paare bilden.

Das Wurzelortskurvenverfahren leistet mehr als die bisher behandelten Stabilitätsverfahren. Außer der Beantwortung der Stabilitätsfrage (für alle Parameterwerte von  $K$ !) liefert es – ebenfalls für alle  $K$  – die Lage der Pole und gestattet damit eine Abschätzung des Übertragungsverhaltens des geschlossenen Regelkreises. Das Wurzelortskurvenverfahren ist damit ein wertvolles Hilfsmittel bei der Synthese von Regelkreisen.

### Literatur

- [FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

**Anhang****Asymptoten der Wurzelortskurve**

Aus Lücke 3 folgt nach Ausmultiplikation der Wurzelfaktoren:

$$K = -\frac{s^n - s^{n-1} \sum_{i=1}^n p_i + \dots}{s^m - s^{m-1} \sum_{i=1}^m z_i + \dots} \quad (\text{binomische Formel})$$

$$= -s^{n-m} \frac{1 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n p_i + \dots}{1 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^m z_i + \dots} \quad (s^n \text{ bzw. } s^m \text{ ausklammern})$$

Vernachlässigung von Termen mit  $\frac{1}{s^k}$  ( $k > 1$ ) führt auf eine Funktion der Form

$$K(x, y) = -s^{n-m} \frac{1-x}{1-y} \quad \text{mit } x = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n p_i \text{ und } y = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^m z_i$$

Die mehrdimensionale Taylor-Entwicklung von  $K(x, y)$  um den Punkt  $(0, 0)$ , also für  $s = \infty$ , bis zur zweiten Ordnung ist

$$\begin{aligned} K(x, y) &\approx K(0, 0) + x \left. \frac{\partial k}{\partial x} \right|_{(0,0)} + y \left. \frac{\partial k}{\partial y} \right|_{(0,0)} \\ &= -s^{n-m} \left( 1 + x \frac{-1}{1-0} + y \frac{1-0}{(1-0)^2} \right) \\ &= -s^{n-m} (1 - (x - y)) \end{aligned}$$

Die Werte von  $x$  und  $y$  wieder eingesetzt ergibt dann

$$K = -s^{n-m} \left( 1 - \frac{1}{s} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \right)$$

Daraus folgt schließlich

$$K^{\frac{1}{n-m}} (-1)^{\frac{1}{n-m}} = s \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{s} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \right)^{\frac{1}{n-m}}}_{f(x)=(1-x)^k}$$

Taylor-Entwicklung von  $f(x)$  um  $x = 0$ :  $f(x) \approx 1 + f_x|_0 x = 1 - kx$  führt auf

$$K^{\frac{1}{n-m}} (-1)^{\frac{1}{n-m}} = s \left( 1 - \frac{1}{s} \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \right) \\ = s - \alpha \quad (1)$$

Dabei ist

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} \quad (2)$$

der sogenannte *Polschwerpunkt*. Aus (1) ergibt sich

$$s = \alpha + (-1)^{\frac{1}{n-m}} \sqrt[n-m]{K} \quad (3)$$

Dies ist zwar eine *Näherung* für die Wurzelortskurve, aber die *exakte* Berechnung für deren *Asymptoten*. Da die  $n-m$  Wurzeln der Gleichung

$$z = (-1)^{\frac{1}{n-m}}$$

bekanntlich gleich  $z_q = e^{i \frac{2q-1}{n-m} \pi}$  ( $q = 1, 2, \dots, n-m$ ) sind, bilden die Asymptoten einen  $(n-m)$ -strahligen Stern mit dem Zentrum im Polschwerpunkt und den Strahlrichtungen

$$\psi_q = \frac{2q-1}{n-m} \pi \quad (4)$$