

# ③ Das dynamische Verhalten von Systemen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 14. September 2015, 12:08

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

## Inhaltsverzeichnis

1	Systemantwort durch Faltung	2
2	Laplace-Transformation	4
3	Blockdiagramme als Modellierungswerkzeuge	7

## Ausblick auf das dynamische Verhalten von Systemen

Das dynamische Verhalten von Systemen lässt sich auf zwei Arten beschreiben. Für eine schnelle, *approximative* Analyse nutzen wir *lineare* Analysemethoden. Die resultierende Approximation der Systemantwort beantwortet die Frage, warum eine Lösung bestimmte Eigenschaften hat und wie das System geändert werden könnte, um die Systemantwort in eine gewünschte Richtung zu lenken. Im Gegensatz dazu erfordert ein *präzises* Bild der Systemantwort typischerweise numerische Simulation der *nichtlinearen* Bewegungsgleichungen. Wir werden uns auf die lineare Analyse konzentrieren.

Es gibt drei Domänen, um das dynamische Systemverhalten zu untersuchen: die **s-Ebene**, den **Frequenzgang** und den **Zustandsraum**. Dieses Semester behandeln wir die s-Ebene und

den Frequenzgang, im nächsten folgt dann der Zustandsraum. Im Folgenden werden einige der grundlegenden mathematischen Werkzeuge besprochen, die für die Analyse in der s-Ebene und des Frequenzgangs notwendig sind.

## 1 Systemantwort durch Faltung

Das Superpositionsprinzip besagt, dass für ein System, dessen Eingang als eine Summe von Signalen dargestellt werden kann, die Systemantwort als die Summe der einzelnen Antworten zu den jeweiligen Signalen dargestellt werden kann. Beispiel:



Die Systemantwort eines linearen Systems zu einem beliebigen Signal lässt sich also bestimmen, indem ein Signal in die Summe von elementaren Komponenten zerlegt wird und die jeweiligen Antworten wieder summiert werden. Die üblichen Kandidaten für elementare Signale sind der Impuls (siehe Beispiel in Abbildung 1) und die Exponentialfunktion.

Der kurze Impuls

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

führe zu der Systemantwort  $h_p(t)$ . Die Systemantwort zum Zeitpunkt  $n\Delta$  zum Eingang  $\Delta \cdot u(k\Delta) \cdot p(n\Delta - k\Delta)$  ist dann



Aus der Superposition ergibt sich die gesamte Systemantwort zu einer Serie von Impulsen zur Zeit  $t$  zu



Für den Grenzübergang  $\Delta \rightarrow 0$  wird der kurze Impuls immer kürzer und höher, wobei die Fläche konstant bleibt. Wir haben dann das Konzept des **Impulssignals**  $\delta(t)$ , das uns erlaubt, kontinuierliche Signale zu behandeln. Es gilt also

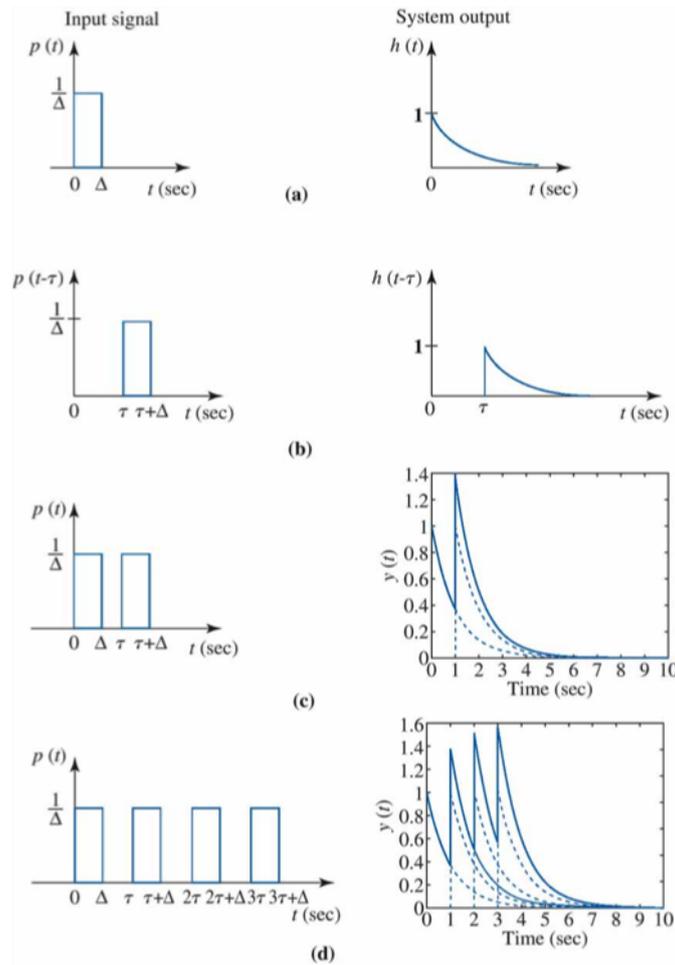


Abbildung 1: Systemantwort auf eine Reihe von kurzen Impulsen, [FPE10, Fig. 3.1, Seite 96]

4

Der (*Dirac'sche*) Impuls  $\delta(t)$  hat folgende Eigenschaften:

5

---

Falls  $f(t)$  kontinuierlich ist, dann wirkt der Impuls als „Sieb“:

6

---

Die Funktion  $f$  kann also als eine Summe von Impulsen dargestellt werden. Ersetzt man in obiger Gleichung  $f$  durch  $u$ , dann ist somit  $u$  eine Summe von Impulsen:

7

---

Daraus folgt, dass man die Antwort eines linearen Systems zu einem *beliebigen* Signal durch Superposition aus der Systemantwort zu einem Einheitsimpuls bestimmen kann. Falls das System zeitinvariant ist, dann ist die Impulsantwort durch  $h(t - \tau)$  gegeben, weil die Antwort zum Zeitpunkt  $t$  zu einem Impuls zum früheren Zeitpunkt  $\tau$  nur von der vergangenen Zeit  $t - \tau$  abhängt. Für zeitinvariante Systeme ist die Antwort auf einen beliebigen Eingang gegeben durch das Faltungsintegral:

8

## 2 Laplace-Transformation

Setzt man in das allgemeine Faltungsintegral für den Eingang  $u(t) = e^{st}$  ( $s = a + ib$  komplex) ein, dann ergibt sich:

9

Die Funktion  $H(s)$  nennt man *Übertragungsfunktion*. Sie ist das Verhältnis der Laplace-Transformierten des Ausgangs  $Y(s)$  zur Laplace-Transformierten des Eingangs  $U(s)$  mit der Bedingung, dass alle Anfangsbedingungen des Systems gleich Null sind, das heißt es gilt

10

$H(s)$  ist die Laplace-Transformierte der Einheitsimpulsantwort  $h(t)$ , denn die Laplace-Transformation ist definiert als

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Sie transformiert die Originalfunktion  $f(t)$  im *Zeitbereich*<sup>1</sup> in die Bildfunktion  $F(s)$  im *Bildbereich*<sup>2</sup>. Weil die Laplace-Transformierte der Impulsfunktion

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} = e^0 = 1$$

ist, gilt also bei  $u(t) = \delta(t)$ :  $Y(S) = H(S)$ .

### Beispiel

Um beispielsweise die Übertragungsfunktion des linearen Systems  $\dot{y} + ky = u$  zu bestimmen, müssen wir die linke und rechte Seite der Differentialgleichung in den Bildbereich transformieren. Dazu brauchen wir zunächst die Laplace-Transformation von  $\dot{y}$ :

<sup>1</sup>Zeitbereich: Die Funktionen sind abhängig von der Zeit  $t$

<sup>2</sup>Bildbereich: Die Funktionen sind abhängig von der komplexen Variable  $s$

11

---

Für die rechte Seite schreiben wir  $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s)$ , so dass für die Übertragungsfunktion  $H(s)$  folgt

12

---

Möchte man die Lösung für eine bestimmte Eingangsfunktion, zum Beispiel für  $u(t) = e^{-at}$  mit  $a \neq k$  bestimmen, dann braucht man die Laplace-Transformierte dieser Funktion

13

---

und löst dann nach  $Y(S)$  auf:

14

---

Zur Rücktransformation in den Zeitbereich und auch für die Laplace-Transformation gängiger Funktionen nutzt man üblicherweise eine Korrespondenztabelle wie Tabelle 2 zusammen mit den Rechenregeln in Tabelle 1. In der Tabelle sind - bis auf Nr. 13, 14 und 15 - nur Partialbrüche

aufgeführt, so dass zusammengesetzte Brüche, so wie in diesem Beispiel, erst in Partialbrüche zerlegt werden müssen, siehe Abbildung 5:



### 3 Blockdiagramme als Modellierungswerkzeuge

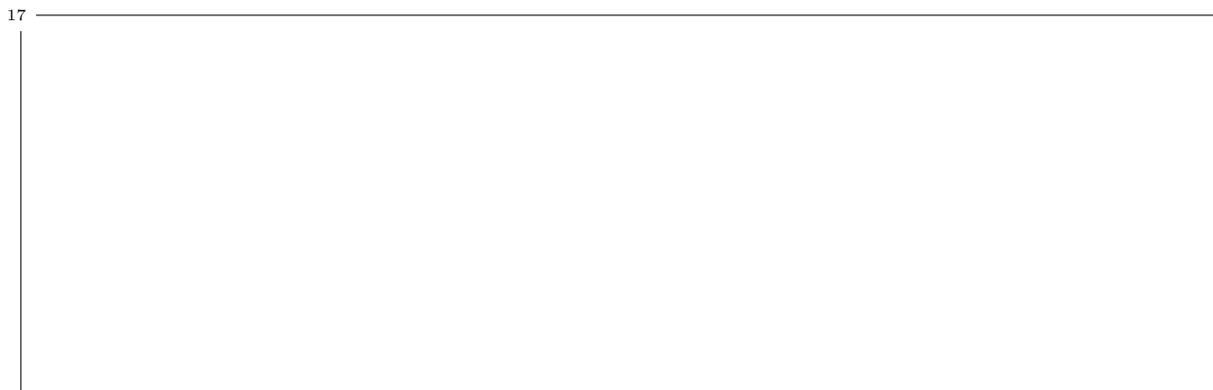
Unter der Annahme, dass die Anfangsbedingungen Null sind, beschreibt die Übertragungsfunktion die Beziehung zwischen Eingang und Ausgang:

$$\underbrace{Y(S)}_{\text{Ausgang}} = \underbrace{H(s)}_{\text{ÜF}} \underbrace{U(s)}_{\text{Eingang}}$$

Blockdiagramm:



Blockdiagramme können kombiniert werden:



Die Übertragungsfunktion für eine komplexe Topologien lässt sich durch sukzessive Umformung und Nutzung der obigen Formeln bestimmen. Weitere Regeln:

18

19

20

Beispiele: Finde die Übertragungsfunktionen der Systeme in den Abbildungen 2 und 3. Abbildung 4 zeigt die Lösung von 2(a) mit Hilfe von MATLAB<sup>®</sup>.

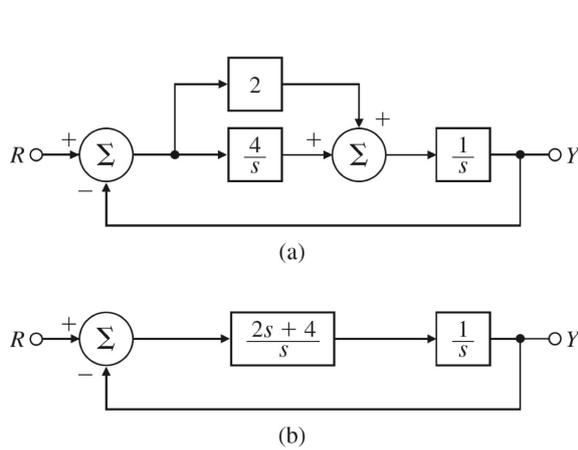


Abbildung 2: Blockdiagramm eines Systems 2. Ordnung, [FPE10, Fig. 3.10, Seite 123]

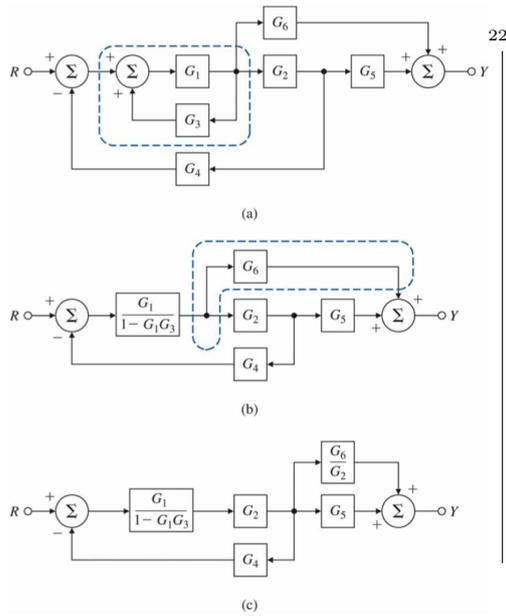


Abbildung 3: Beispiel für eine Blockdiagrammvereinfachung, [FPE10, Fig. 3.11, Seite 124]

### Literatur

- [FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.
- [Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 1. Vieweg + Teubner, 2011.

---

```

1  num1=[2]; % Zähler G1
2  den1=[1]; % Nenner G1
3  sysG1=tf(num1,den1) % definiere G1
4
5  num2=[4]; % Zähler G2
6  den2=[1 0]; % Nenner G2
7  sysG2=tf(num2,den2) % definiere G2
8
9  % Parallelschaltung G1 und G2:
10 sysG3=parallel(sysG1,sysG2)
11
12 num4=[1]; % Zähler G4
13 den4=[1 0]; % Nenner G4
14 sysG4=tf(num4,den4) % definiere G4
15
16 % Reihenschaltung G3 und G4
17 sysG5=series(sysG3,sysG4)
18
19 num6=[1]; % Zähler G6
20 den6=[1]; % Nenner G6
21 sysG6=tf(num6,den6) % definiere G6
22
23 % negative Rückkopplung G5 und G6
24 [sysCL]=feedback(sysG5,sysG6,-1)

```

---

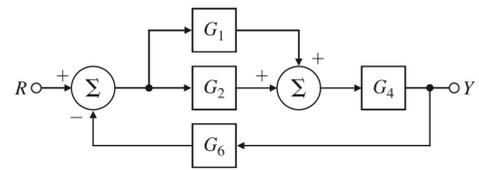


Abbildung 4: Matlab-Skript aus [FPE10, Seite 125] zur Berechnung der Übertragungsfunktion in Abbildung 2(a) mit den Bezeichnungen im abgebildeten Blockdiagramm.

## Anhang

Tabelle 1: Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \circ \bullet c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$f(t - T_t) \circ \bullet F(s) e^{-sT_t}$
Dämpfungssatz	$e^{-at} f(t) \circ \bullet F(s + a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{df(t)}{dt} \circ \bullet sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation Z'bereich	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \circ \bullet s^2 F(s) - sf(0) - \left. \frac{df}{dt} \right _0$
$n$ -fache Differentiation Z'bereich	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ \bullet s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \left. \frac{d^{i-1} f}{dt^{i-1}} \right _0$
Differentiation im Bildereich	$-t f(t) \circ \bullet \frac{d}{ds} F(s)$
$n$ -fache Differentiation im B'bereich	$(-t)^n f(t) \circ \bullet \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \circ \bullet F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0+) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} (sF(s))$
2. Grenzwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))$

Tabelle 2: Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Nr.	$f(t), t > 0$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$ oder $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
6	$t^n e^{-at}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
8	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
9	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
10	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
11	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
12	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
13	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
14	$e^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$
15	$1 - e^{-at} \left( \cos \omega_0 t + \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$	$\frac{a^2 + \omega_0^2}{s \left( (s+a)^2 + \omega_0^2 \right)}$

Eine *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ  $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$  lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus *Partialbrüchen* zerlegen:

1. Zunächst werden die *Nullstellen des Nennerpolynoms*  $N(x)$  nach *Lage* und *Vielfalt* bestimmt.
2. *Jeder* Nullstelle wird ein *Partialbruch* in folgender Weise zugeordnet, wobei konjugiert komplexe Nullstellen zum entsprechenden reellen quadratischen Term zusammengefasst werden können:

$$\begin{array}{lll}
 x_1: & \text{Einfache Nullstelle} & \rightarrow \frac{A}{x - x_1} \\
 x_1: & \text{Zweifache Nullstelle} & \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} \\
 \vdots & & \\
 x_1: & \text{\textit{r-fache} Nullstelle} & \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r} \\
 x^2 + ax + b: & \text{1-facher quadratischer Term} & \rightarrow \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} \\
 (x^2 + ax + b)^2: & \text{2-facher quadratischer Term} & \rightarrow \frac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + ax + b)^2} \\
 (x^2 + ax + b)^r: & \text{\textit{r-facher} quadratischer Term} & \rightarrow \frac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(x^2 + ax + b)^r}
 \end{array}$$

3. Die *echt* gebrochenrationale Funktion  $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$  ist dann als *Summe aller Partialbrüche* darstellbar.
4. Konstanten durch *Koeffizienten-Vergleich*, oder bei einfachen Nullstellen auch durch Einsetzen der Nullstelle bestimmen.

Abbildung 5: Algorithmus zur Partialbruchzerlegung aus [Pap11, Seite 469]