7 Bode-Diagramm*

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 9. November 2014, 17:34

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

*[FPE10, Kapitel 6.1]

1 Vorzüge des Bode-Diagramms

Wie bereits erwähnt gibt es die beiden Darstellungsformen des Frequenzgangs als Nyquist-Diagramm in der komplexen Ebene oder als *Bode-Diagramm* mit Betrag oder Amplitude (*Magnitude*) $A = |G(\mathrm{i}\,\omega)|$ und Phasewinkel $\varphi = \angle\{G(\mathrm{i}\,\omega)\}$ in Abhängigkeit von der Frequenz. Charakteristisch für das Bode-diagramm ist, dass

1. die Abszissenachsen (ω-Achsen) sowie die $A(\omega)$-Achse *logarithmisch* und
2. die $\varphi(\omega)$-Achse *linear* geteilt sind.

Es wird also $\log A$ über $\log \omega$ und φ über $\log \omega$ aufgetragen. Diese Art der Darstellung des Frequenzgangs hat folgende Vorzüge:

a) Vereinfachte Berechnung des *Produkts* zweier, oder mehrerer, Frequenzgänge.
Aus

1

folgt nämlich

2

Wegen der logarithmischen Teilung der A-Achse brauchen bei der Bildung des Gesamtfrequenzganges nur *Strecken* parallel der Ordinatenachse 3 zu werden, sowohl bei $A(\omega)$ als auch bei $\varphi(\omega)$.

b) Vereinfachung der *Inversion* (=Kehrwertbildung) eines Frequenzgangs.
Wegen

4

und

5

brauchen die Kurven $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ nur an den Achsen $\log A = 0$ bzw. $\varphi = 0$ *gespiegelt* zu werden.

c) Infolge der gewählten Achsenteilungen (doppelt-logarithmisch beziehungsweise einfach-logarithmisch) kann die Kurve $A(\omega)$ in guter Näherung durch einen *Streckenzug* und $\varphi(\omega)$ durch eine *Treppenkurve* dargestellt werden..´

d) Bei einer wichtigen Klasse zeitinvarianter linearer Systeme, den sogenannten

6 ______

besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Amplituden- und Phasengang. Hier lässt sich $\varphi(\omega)$ aus $A(\omega)$ berechnen, so dass man sich bei der messtechnischen Ermittlung des Frequenzganges auf $A(\omega)$ beschränken kann.[1]

2 PT_1-System

Die Behauptung c) zeigen wir im Folgenden schrittweise. Zunächst wird dazu ein PT_1-System betrachtet:

7 ______

Dabei heißt 8 ______ aus später ersichtlichen Gründen 9 ______ .

Aus Lücke 7 folgt

10 ______

Aus folgenden drei Fällen lassen sich die Anfangs- und Endasymptote sowie deren Schnittpunkt berechnen:

1. Anfangsasymptote:

   11 ______

2. Endasymptote:

   12 ______

3. Schnittpunkt der beiden Asymptoten von $A(\omega)$:

   13 ______

[1] Diese Eigenschaft ist natürlich *keine* Folge der speziellen Achsenteilung.

4. Exakter Funktionswert für $\omega = \omega_\mathrm{E}$: 14

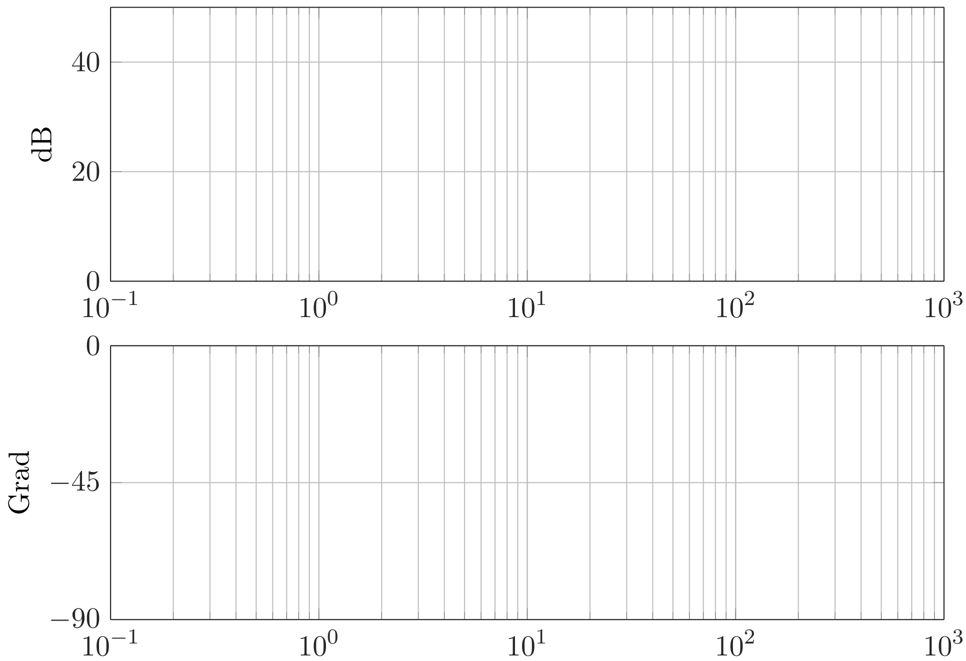
5. Steigung des Phasengangs im Punkt $\omega = \omega_\mathrm{E}$: Die logarithmische Teilung bedeutet für die Abszisse $x = \log \omega \Rightarrow \omega = 10^x$. Somit ergibt sich

15

6. Schnittpunkt der Tangente in $\varphi(\omega_\mathrm{E})$ mit den beiden Asymptoten.

16

Mit Hilfe der Asymptoten und den Werten für $\omega = \omega_\mathrm{E}$ lässt sich das Bode-Diagramm leicht skizzieren. Im Bode-Diagramm wird üblicherweise der Amplitudengang in deziBel, also $|G|_\mathrm{dB} = 20 \log|G(\mathrm{i}\,\omega|$ aufgetragen. Beispiel für $K = 100$ und $\omega_\mathrm{E} = 10\,\mathrm{s}^{-1}$



3 PD_1-Glied

Als zweites Beispiel betrachten wir ein *ideales* PD-Glied:

17

Abgesehen von der Konstanten K ist der Verlauf des Frequenzgangs in Lücke 17 *invers* zum Frequenzgang (7). Nach b)) erhält man die entsprechenden Kurven durch *Spiegelung*, falls die Eckfrequenz ω_{E} in beiden Fällen gleich ist. Mit den Zahlenwerten $K = 100$ und $\omega_{\mathrm{E}} = 10$ muss die $A(\omega)$-Kurve an der Geraden $\log A(\omega) = 40\,\mathrm{dB}$ und die $\varphi(\omega)$-Kurve an der Geraden $\varphi(\omega) = 0$ gespiegelt werden.

Somit ist man jetzt in der Lage, Bode-Diagramme für *beliebige rationale* Frequenzgänge zu konstruieren, wenn die zugehörige Übertragungsfunktion *nur reelle Nullstellen* und *Pole* besitzt. Beispiel siehe Übungsblatt `07ueb.pdf`.

4 PT_2-System

Um Bode-Diagramme für *alle rationalen* Übertragungsfunktionen beziehungsweise Frequenzgänge zeichnen zu können, muss noch der Fall *konjugiert komplexer* Pole oder Nullstellen untersucht werden. Dazu wird ein *schwingungsfähiges* PT_2-Glied betrachtet:

18

19

Aus

lassen sich folgende *Grenzfälle* entnehmen:

a) Anfangsasymptote: $\omega^2 T_1^2 \ll 1$ und $\omega^2 T_2^2 \ll 1$

20

b) Endasymptote: $\omega^2 T_2^2 \gg 1$

21

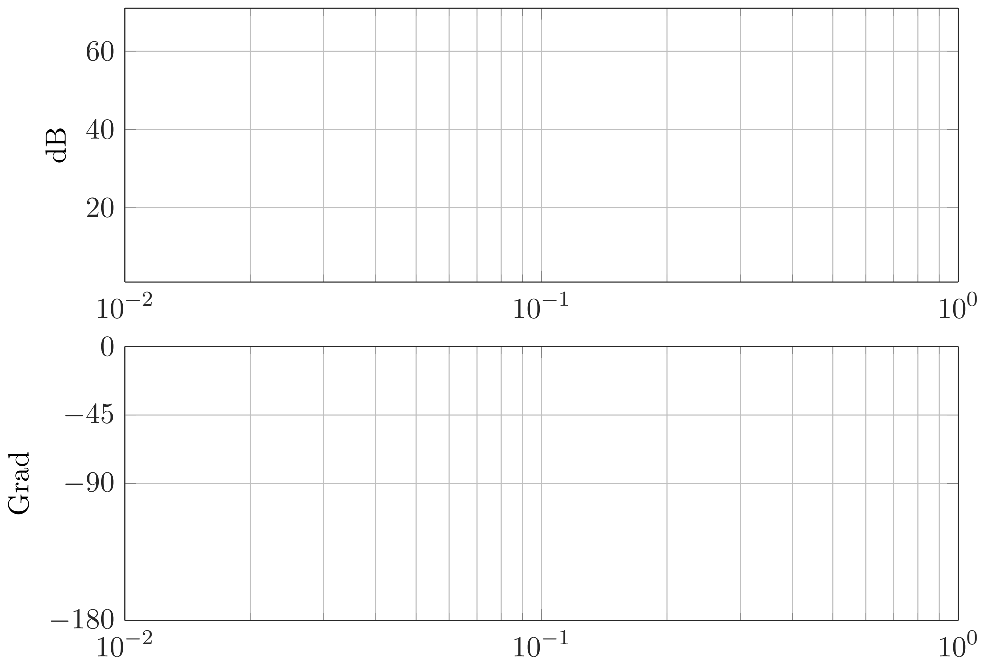
c) Schnittpunkt der Asymptoten von $A(\omega)$

22

d) Exakter Funktionswert für $\omega = \omega_E$

23

Beispiel für $K = 100$, $T_1 = 1$, $T_2 = 10$:



5 Reine D- und I-Glieder

Jetzt fehlen nur noch reine D- und I-Glieder erster oder höherer Ordnung:

24

Es gilt

25

Somit ist

26

6 Zusammenfassung der Bode-Diagramm-Regeln

1. Forme die Übertragungsfunktion um in die Bode-Form

   27

2. Zeichne die Anfangsasymptote durch den Punkt 28

   mit der Steigung 29

3. Erweitere die Niedrigfrequenz-Asymptote bis zur ersten Eckfrequenz. Ändere die Steigung um ± 1 oder ± 2, je nachdem ob es ein Term erster oder zweiter Ordnung im Zähler oder Nenner ist.

4. Für Terme erster Ordnung erhöht / erniedrigt sich der Amplitudengang gegenüber der Asymptote an der Eckfrequenz um den Faktor

   30

   für Terme im

   31

   Für Terme zweiter Ordnung ist die Resonanz-Spitze / Tal bei der Eckfrequenz

   32

33

5. Zeichne die Niedrig-Frequzenz Asymptote des Phasengangs

6. Die Asymptote des Phasengangs springt bei einer Eckfrequenz um $\pm 90\,°$ oder $\pm 180\,°$.

   34

   Für Terme erster Ordnung im *Zähler* ist die Änderung und im *Nenner*

   35

   Für Terme zweiter Ordnung ist die Änderung $\pm 180\,°$.

7. Skizziere jeden einzelnen Phasengang.

8. Addiere graphisch die einzelnen Phasengänge.

7 Phasenminimumsystem und Allpass

Im vorigen Kapitel wurde die Klasse der Phasenminimumsysteme und ihre wesentlichste Eigenschaft (eindeutiger Zusammenhang zwischen Amplituden- und Phasengang) erwähnt. Im Folgenden wird das *Phasenminimumsystem* für asymptotisch stabile Syteme definiert. Die kennzeichnende Eigenschaft eines asymptotisch stabilen Phasenminimumsystems ist:

> Bei *gegebener Anzahl* von n *Polen* und m *Nullstellen* der Übertragungsfunktion hat ihr Frequenzgang beim Durchlaufen des Frequenzintervalls $[-\infty, +\infty]$ die *geringstmögliche* Phasendrehung $\Delta\varphi = \varphi(\omega = -\infty) - \varphi(\omega = +\infty)$ im Uhrzeigersinn.

Nun ist

36

Da das Phasenminimumsystem laut Definition asymptotisch stabil ist, liegen alle Pole *links* der Imaginärachse der s-Ebene. Nach dem Stabilitätskriterium von Cremer-Leonhard-Michailov ist deshalb

37

An diesem Wert lässt sich nichts ändern. Daher muss, damit $\Delta\varphi$ möglichst klein wird, der Ausdruck

38

möglichst groß werden. Eine Nullstelle von $G(s)$ in der rechten Halbebene dreht (nach denselben Überlegungen wie bei der Herleitung des CLM-Kriteriums) den Phasenwinkel φ_b um $-\pi$ dagegen wenn sie in der linken Halbebene liegt um $+\pi$. Ein Minimum von $\Delta\varphi$ erhält man also, wenn *alle Nullstellen links liegen.*

Ein Totzeitfaktor e^{-sT_t} bringt eine zusätzliche (unendliche) Phasendrehung $\Delta\varphi$. Daher ist ein *Phasenminimumsystem* genau dann gegeben, wenn die Übertragungsfunktion

39

Zu jedem gegebenen Amplitudengang $A(\omega)$ gibt es genau *ein* Phasenminimumsytem. Alle *anderen* Systeme mit *demselben* Amplitudengang haben eine *größere* Drehung $\Delta\varphi$ im Phasengang $\varphi(\omega)$. Sie müssen also einen sogenannten *Allpass-Anteil* enthalten, der eine Phasendrehung bewirkt, ohne den Amplitudengang zu verändern.

Ein asymptotisch stabiles *Allpass-Glied* hat demnach folgende Eigenschaften:

40

Diese Bedingungen werden natürlich in idealer Weise von jedem *reinen Totzeitglied* $G(s) = \mathrm{e}^{-sT_t}$ erfüllt. Unter einem Allpass im engeren Sinne wird aber eine rationale Funktion mit den Eigenschaften in Lücke 40 verstanden.

Um die erste Forderung in Lücke 40 bei einer rationalen Übertragungsfunktion G mit reellen Koeffizienten zu erfüllen, gibt es nur zwei Möglichkeiten:

Entweder: $b(\mathrm{i}\,\omega) \equiv a(\mathrm{i}\,\omega) \Rightarrow G(\mathrm{i}\,\omega) \equiv 1$. Dies ist kein Allpass, weil wegen $\varphi(-\infty) - \varphi(+\infty) = 0$ die zweite Bedingung in Lücke 40 nicht erfüllt wäre.

Oder: $b(\mathrm{i}\,\omega)$ ist *konjugiert komplex* zu $a(\mathrm{i}\,\omega)$. Dann sind tatsächlich die Forderungen in Lücke 40 erfüllt.

Ein Allpass n-ter Ordnung hat also den Frequenzgang

41

Daher lautet die Übertragungsfunktion des Allpasses n-ter Ordnung

42

Man sieht sofort, dass die Gleichung in Lücke 42 nicht zu einem Phasenminimumsystem gehören kann, weil der Zähler (wegen der Verletzung der Vorzeichenbedingung) *kein Hurwitz-* oder *Routhpolynom* ist. Durch die Substitution $s \to -s$ geht der Zähler bei einem (beliebigen) Allpass aus dem Nenner hervor. Also sind die Nullstellen von $G(s)$ die *Spiegelbilder* der Pole. Weil aber Pole und Nullstellen reell sind oder in konjugiert komplexen Paaren auftreten, kann man auch behaupten: Bei einem Allpass ist die Nullstellenverteilung in der s-Ebene das *Spiegelbild* der Polverteilung bezüglich der ω-Achse.

Die Gleichung in Lücke 42 geht bei Zerlegung in *Wurzelfaktoren* über in:

43

Zum Schluss soll an einem Beispiel gezeigt werden, wie ein beliebiges zeitinvariantes lineares System in ein *Phasenminimumsystem* und einen *Allpass* zerlegt werden kann. Gegeben sei

$$G(s) = -5\frac{(s+1)(s-2)(s-1+\mathrm{i})(s-1-\mathrm{i})}{(s+3)(s+2+\mathrm{i})(s+2-\mathrm{i})(s+4)}$$

Mit der Erweiterung $(s+2)(s+1+\mathrm{i})(s+1-\mathrm{i})$ erhält man die Zerlegung:

$$G(s) = \underbrace{5\frac{(s+1)(s+2)(s+1+\mathrm{i})(s+1-\mathrm{i})}{(s+3)(s+2+\mathrm{i})(s+2-\mathrm{i})(s+4)}}_{\text{Phasenminimumsystem}}\underbrace{(-1)\frac{(s-2)(s-1+\mathrm{i})(s-1-\mathrm{i})}{(s+2)(s+1+\mathrm{i})(s+1-\mathrm{i})}}_{\text{Allpass}}$$

Schema zum Zeichnen eines Bodediagramms

Ein nach diesen Zeichenregeln erstelltes Bode-Diagramm approximiert den tatsächlichen Frequenzgang. Um ein exaktes Bode-Diagramm zu zeichnen, muss der Frequenzgang analytisch berechnet und diskretisiert werden.

Darstellung der Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ wird faktorisiert als

$$G(s) = c \cdot s^r \cdot \underbrace{G_1(s) \cdot G_1(s) \cdot \ldots \cdot G_k(s)}_{G^*(s)} \cdot \mathrm{e}^{-T_t s} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_0,\ T_t \in \mathbb{R}$$

Dabei können die einzelnen Teilsysteme $G_i(s)$ die folgenden Formen annehmen:

$G_i(s) = (s + n_i)$	reelle Nullstelle mit der Eckfrequenz $\omega_i = \lvert n_i \rvert$
$G_i(s) = (s^2 + 2D_i m_i s + m_i^2)$	konjugiert komplexes Nullstellenpaar mit der Eckfreq. $\omega_i = \lvert m_i \rvert$
$G_i(s) = \dfrac{1}{s + p_i}$	reelle Polstelle mit der Eckfrequenz $\omega_i = \lvert p_i \rvert$
$G_i(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2D_i q_i s + q_i^2}$	konjugiert komplexes Polpaar mit der Eckfreq. $\omega_i = \lvert q_i \rvert$

Bei Pol-/Nullstellenpaaren muss $|D_i| \leq 1$ gelten, ansonsten liegen zwei reelle Pole/Nullstellen vor. Die Teilsysteme $G_i(s)$ sind nach aufsteigenden Eckfrequenzen ω_i zu sortieren. Diese Eckfrequenzen sind stets positiv. Weil Pole und Nullstellen das Bodediagramm für Frequenzen unterhalb ihrer Eckfrequenz nicht beeinflussen (zumindest nicht in der hier dargestellten Approximation), lässt sich dadurch das Bode-Diagramm von links nach rechts zeichnen. Die Zeichenregeln geben dann an, wie sich Phasen- und Amplitudengang bei jeder Eckfrequenz verändern.

Die niedrigste Eckfrequenz ω_1 wird als Startfrequenz bezeichnet. Wenn keine G_i existieren ($k = 0$), kann $\omega_{\min} > 0$ beliebig gewählt werden. Das Produkt aller $G_i(s)$ wird als $G^*(s)$ bezeichnet.

Zeichnen des Amplitudengangs

Der Amplitudengang wird in Dezibel über einer logarithmischen Frequenzachse aufgetragen. Man beginnt bei der Startfrequenz, deren zugehörige Startamplitude berechnet wird durch

$$A_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20 \log_{10} \left(\left| c \cdot G^*(0) \right| \cdot \omega_{\min}^r \right)$$

Markieren Sie sich diesen Startpunkt $(\omega_{\min}, A_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}))$ im Amplitudendiagramm! Von dort aus wird zunächst eine Gerade rückwärts, das heißt nach links, mit einer Steigung von $r \cdot 20^{\mathrm{dB}}/_{\mathrm{Dekade}}$ gezeichnet. Anschließend wird der rechte Teil des Amplitudengangs ab $\omega_{\min}$ betrachtet. Er besteht aus Geradensegmenten.

Bei jeder Eckfrequenz ω_i, einschließlich der kleinsten Eckfrequenz $\omega_{\min}$, knickt der Amplitudengang ab, und zwar:

$G_i(s) = (s + n_i)$ Knick um $+20\,\mathrm{dB}/\mathrm{Dekade}$

$G_i(s) = (s^2 + 2D_i m_i s + m_i^2)$ Knick um $+40\,\mathrm{dB}/\mathrm{Dekade}$

$G_i(s) = \dfrac{1}{s + p_i}$ Knick um $-20\,\mathrm{dB}/\mathrm{Dekade}$

$G_i(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2D_i q_i s + q_i^2}$ Knick um $-40\,\mathrm{dB}/\mathrm{Dekade}$

Das Totzeitglied $\mathrm{e}^{-T_t s}$ beeinflusst den Amplitudengang nicht. Der Verstärkungsfaktor c wurde bereits durch die Berechnung des Startpunkts berücksichtigt.

Schreiben Sie an alle Geradensegmente die jeweilige Steigung (zum Beispiel $-20\,\mathrm{dB}/\mathrm{Dekade}$) und markieren Sie die Eckfrequenzen.

Zeichnen des Phasengangs

Die Phase wird in Grad (°) über einer logarithmischen Frequenzachse aufgetragen. Analog zur Approximation des Amplitzudengangs wird auch hier die Phase segmentweise zwischen den Eckfrequenzen bestimmt. Links von der Startfrequenz $\omega_{\min}$ beträgt die Phase

$$\varphi(0) = \begin{cases} r \cdot 90° & \text{wenn } c \cdot G^*(0) > 0 \\ -180° + r \cdot 90° & \text{wenn } c \cdot G^*(0) < 0 \end{cases}$$

Anschließend ändert sich die Phase an jeder Eckfrequenz ω_i, einschließlich $\omega_{\min}$, wie folgt:

$G_i(s) = (s + n_i)$ Sprung um $+90° \cdot \operatorname{sign}(n_i)$

$G_i(s) = (s^2 + 2D_i m_i s + m_i^2)$ Sprung um $+180° \cdot \operatorname{sign}(D_i m_i)$

$G_i(s) = \dfrac{1}{s + p_i}$ Sprung um $-90° \cdot \operatorname{sign}(p_i)$

$G_i(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2D_i q_i s + q_i^2}$ Sprung um $-180° \cdot \operatorname{sign}(D_i q_i)$

Falls ein ungedämpftes Polpaar auftritt, das heißt $D_i = 0$ ist, tritt eine Singularität auf. Dann kann beliebig $\operatorname{sign}(0) = 1$ oder $\operatorname{sign}(0) = -1$ angesetzt werden. Treten Zeitverzögerungen $\mathrm{e}^{-T_t s}$ mit $T_t \neq 0$ auf, so sind diese Zeichenregeln für den Phasengang nicht anwendbar. Der Phasengang muss dann stets mit Hilfe von Stützstellen gezeichnet werden.

Diese Treppenapproximation für den Phasengang ist nur dürftig, daher muss er häufig mit Hilfe von Stützstellen diskretisiert werden.