⑥ Stabilität von linearen Systemen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 3. November 2014, 14:29

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Stabilitätskriterium nach Routh / Hurwitz[1]

Das Problem ist die Bestimmung aller Wurzeln eines Polynoms. Polynome 3. und 4. Ordnung lassen sich noch algebraisch lösen, für Polynome höherer Ordnung bewies Galois ca. 1830, dass keine allgemeine Formel zur Lösung existiert. Um die Stabilität zu bestimmen, müssen die Pole des charakteristischen Polynoms nicht bekannt sein sondern nur, ob alle in der linken Halbebene liegen. Das lässt sich mit der hier vorgestellten Methode von Routh (1874) oder der äquivalenten Methode von Hurwitz (1895) feststellen.

[1] Siehe [FPE10, Kapitel 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3]

Charakteristisches Polynom, so normiert, dass der Koeffizient für das Element höchster Ordnung gleich eins ist:

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \tag{1}$$

1

Notwendige Bedingung für Stabilität:

Begründung:

2

Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend, es gibt also Systeme, die die Bedingung erfüllen und trotzdem Pole in der rechten Halbebene haben. Routh hat folgendes Tableau zur Beurteilung der Stabilität entwickelt:

3

mit

4

Routh's Stabilitätskriterium:

- Alle Wurzeln eines Polynoms sind dann und nur dann in der *offenen* LHE, wenn alle Elemente der ersten Spalte positiv sind.
- Die Anzahl der Wurzeln in der *geschlossenen* RHE ist gleich der Anzahl der Vorzeichenänderungen in der ersten Spalte.
- Wenn das erste Element einer Zeile null ist, ersetze das Element durch $\epsilon > 0$ und setze fort. Wende das Stabilitätskriterium an für $\epsilon \to 0_+$

Beispiel

Das Polynom

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$$

erfüllt die notwendige Bedingung 5 ______ . Wieviele Pole liegen in der geschlossenen RHE? Lösung mit Hilfe des Routh-Tableaus:

6

Das Polynom hat somit 7 Wurzeln in der geschlossenen RHE, weil es in der ersten Spalte 8 Vorzeichenwechsel gibt.

2 Stabilitätskriterium von Cremer-Leonhard-Michailov (CLM-Kriterium)[2]

Im Gegensatz zu den bisherigen ist dieses Kriterium kein algebraisches, sondern (wenigstens in seiner Formulierung) ein *graphisches* Verfahren.[3]

Annahme: Das charakteristische Polynom (1) habe m Wurzeln ($m \leq n$) in der *rechten* und $n - m$ Wurzeln in der *linken* Halbebene. Die Ortskurve lautet dann nach Zerlegung in Wurzelfaktoren

9

und mit Darstellung jedes einzelnen Faktors durch Betrag und Phasenwinkel

[2] Siehe [Unb08, Kapitel 6.3]

[3] Siehe auch *The Argument Principle* in [FPE10, Kapitel 6.3.1]

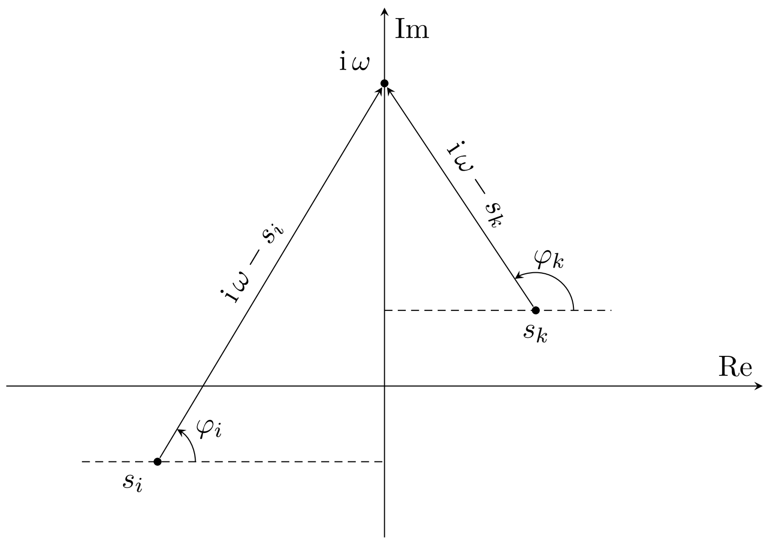

Abbildung 1: Phasenwinkel für eine Nullstelle s_i in der linken und eine Nullstelle s_k in der rechten Halbene der komplexen Zahlenebene.

10

Nun lassen wir ω von $-\infty$ nach $+\infty$ laufen und beobachten dabei die Änderung der einzelnen Phasenwinkel φ_i. Nach Abbildung 1 gilt

11

Daher ergibt sich:

12

Damit gilt:

13

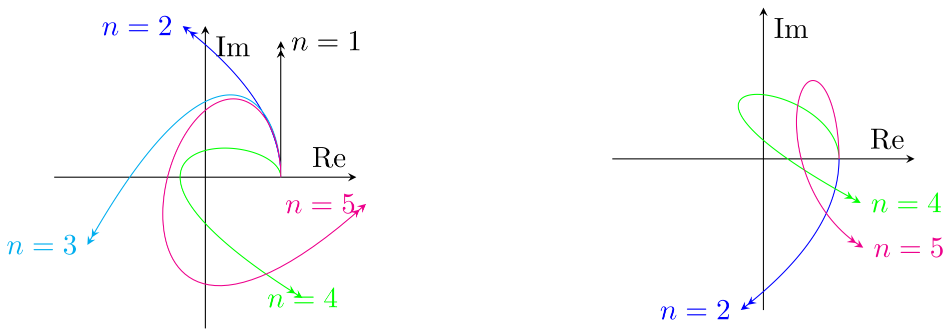

Abbildung 2: CLM-Ortskurven asymptotisch stabiler (linkes Bild) und instabiler (rechtes Bild) Systeme

Laut Voraussetzung gibt es genau m Wurzeln mit $\mathrm{Re}(s_k) > 0$. Damit folgt:

14

Nun liegen aber alle Wurzeln *symmetrisch* zur reellen Achse, daher gilt:

15

Es genügt also völlig, ω von 0 bis $+\infty$ laufen zu lassen, und man erhält anstelle von Lücke 14

16

Da asymptotische Stabilität gleichbedeutend mit $m = 0$ ist, lautet das CLM-Kriterium:

> Ein System n-ter Ordnung mit dem charakteristischen Polynom $P(s)$ ist genau dann *asymptotisch stabil,* wenn sich bei einer stetigen ω-Änderung von 0 nach $+\infty$ der *Zeiger der Ortskurve* $P(\mathrm{i}\,\omega)$ um den Winkel $\frac{n}{2}\pi$ (im mathematisch positiven Sinn = Gegenuhrzeigersinn) dreht.

Darüberhinaus gibt das CLM-Kriterium im Falle von *Instabilität,* das heißt wenn $\Delta\varphi < n\frac{\pi}{2}$ ist, nach der Gleichung in Lücke 16 Auskunft darüber, *wieviele* Wurzeln in der rechten Halbebene liegen ($m > 0$). Die in Abbildung 2 dargestellten Beispiele legen eine zweite, anschaulichere Formulierung des CLM-Kriteriums nahe:

> Ein System n-ter Ordnung ist genau dann *asymptotisch stabil*, wenn die CLM-Ortskurve $P(i\omega)$ genau n im Gegenuhrzeigersinn aufeinanderfolgende Quadranten durchläuft, bei von 0 bis $+\infty$ wachsendem ω.

Das hier beschriebene Kriterium lässt sich auch in der Form des *Lückenkriteriums* angeben:

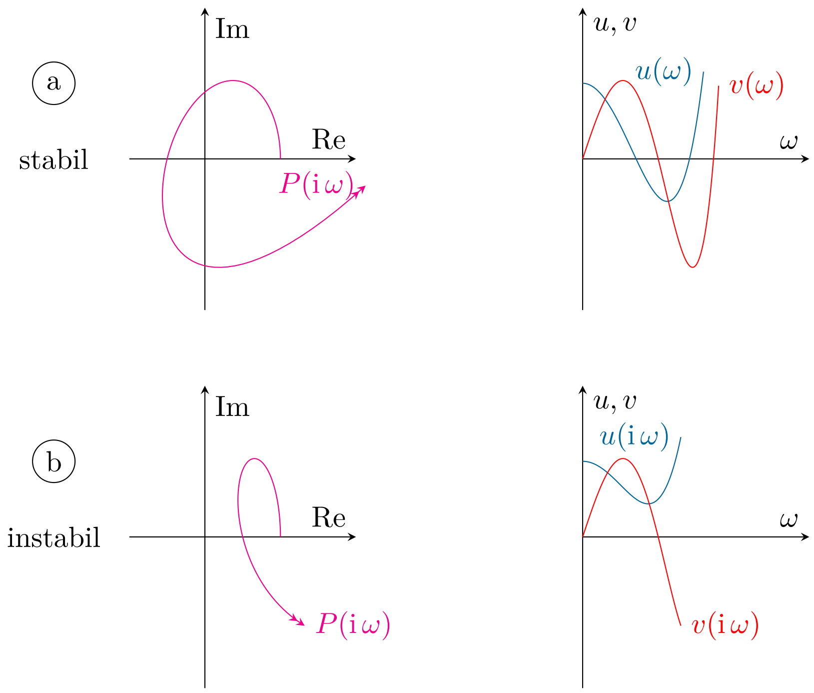

Abbildung 3: Verlauf der CLM-Ortskurve $P(\mathrm{i}\,\omega)$ sowie $u(\omega)$ und $v(\omega)$ für (a) ein asymptotisch stabiles und (b) ein instabiles System.

Ein System mit der charakteristischen Gleichung (1) ist dann und nur dann asymptotisch stabil, wenn in der entsprechenden Ortskurve

$$P(\mathrm{i}\,\omega) = u(\omega) + \mathrm{i}\,v(\omega)$$

Realteil $u(\omega)$ und Imaginärteil $v(\omega)$ zusammen n reelle Nullstellen im Bereich $0 \leq \omega \leq \infty$ besitzen und bei wachsenden ω-Werten die Nullstellen von $u(\omega)$ und $v(\omega)$ einander abwechseln, siehe Abbildung 3.

3 Nyquist-Stabilitätskriterium für geschlossenen Regelkreis[4]

„Früher“ gab es die Faustregel, dass man die Regelverstärkung reduzieren muss um den Regelkreis zu stabilisieren. Es zeigte sich aber, dass ein System auch instabil werden kann, wenn man die Verstärkung *verkleinert*. Das motivierte Harry Nyquist 1932 dieses Problem zu lösen. Ziel ist es, die Stabilität des *geschlossenen* Regelkreises mit Hilfe der Erkenntnisse über den *offenen* Regelkreis zu bestimmen.

Im Folgenden wird das Nyquist-Verfahren für lineare zeitinvariante Regelkreise *ohne* Totzeit hergeleitet. Die Übertragungsfunktion $H(s)$ des offenen Kreises ist dann eine rationale Funktion von s:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \tag{2}$$

[4] [FPE10, Siehe Kapitel 6.3]

wobei b und a keine gemeinsamen Nullstellen haben mögen. Die charakteristische Gleichung des *offenen* Kreises lautet bekanntlich

$$a(s) = 0 \tag{3}$$

Die Lage der Wurzeln dieser Gleichung, das heißt die Pole von $H(s)$, sei bekannt. Zum Beispiel mit dem Cremer-Leonhard-Michailov-Verfahren sei ermittelt worden, dass

m_0 Wurzeln von (3) inder *rechten* s-Halbebene und

$n_0 - m_0$ Wurzeln in der *linken* s-Halbebene liegen.

Auf der ω-Achse sollen *keine* Wurzeln von (3) auftreten. Für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises ist nun die Lage der Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung entscheidend:

$$1 + H(s) = \frac{a(s) + b(s)}{a(s)} = 0 \tag{4}$$

Diese Gleichung reduziert sich also auf

17

18

Um die interessierende Größe m_g zu ermitteln, lässt sich der Phasengang des Frequenzgang untersuchen.

19

Mit dem CLM-Kriterium gilt hier für Zähler beziehungsweise Nenner in Lücke 19:

20

Der Gesamtwinkel, um den sich die Ortskurve von $1 + H(\mathrm{i}\,\omega)$ dreht, ist dann die Differenz dieser beiden Größen:

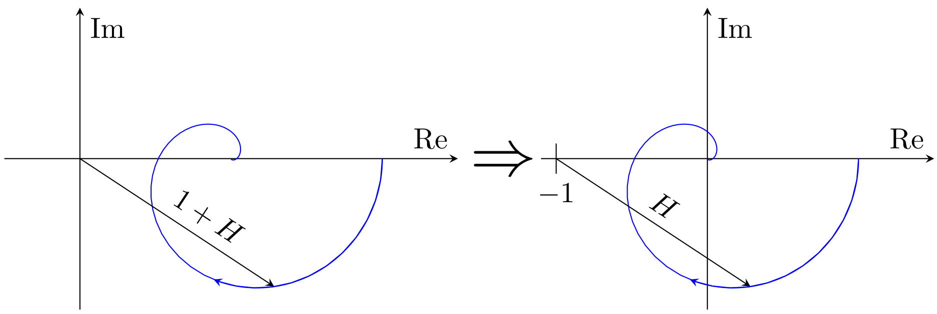

Abbildung 4: Ortskurve $1 + H(\mathrm{i}\,\omega)$ eines asymptotsich stabilen geschlossenen Kreises (links) und $H(\mathrm{i}\,\omega)$ des entsprechenden asymptotisch stabilen offenen Kreises (rechts).

21

Oder aufgelöst nach der unbekannten Zahl m_g

22

Die Zahlen m_0, n_g und n_0 sind bekannt. Der Drehwinkel $\Delta\varphi$ lässt sich graphisch ermitteln, indem man die Ortskurve von $1 + H(\mathrm{i}\,\omega)$ in der s-Ebene zeichnet und feststellt, um welchen Winkel sich der Zeiger der Ortskurve bei der oben beschriebenen ω-Variation dreht. Das lässt sich vereinfachen, indem man das gesamte Diagramm um 1 nach links verschiebt: Dann ist die Ortskurve $H(\mathrm{i}\,\omega)$ des *offenen* Kreises zu zeichnen und der Drehpunkt des Zeigers ist in den Punkt $(-1, 0)$, in den sogenannten *kritischen Punkt*, der s-Ebene zu verlegen. Wenn nun also $\Delta\varphi$ aufgrund der Ortskurve $H(\mathrm{i}\,\omega)$ des *offenen* Kreises ermittelt ist, gibt die Gleichung in Lücke 22 an, wieviele Pole des *geschlossenen* Kreises in der rechten s-Halbebene liegen.

In der Regel benutzt man aber das Nyquist-Verfahren als *reines Stabilitätskriterium* und fragt daher nur nach der Bedingung dafür, dass $m_\mathrm{g} = 0$ ist. Damit erhält man aus Lücke 21 oder 22:

> Ein *geschlossener* Regelkreis ist *asymptotisch stabil,* wenn der Zeiger, der vom kritischen Punkt $(-1, 0)$ zur Ortskurve des *offenen* Kreises verläuft, bei einer Variation von $\omega = 0$ bis $\omega = +\infty$ den Winkel
>
> 23
>
> durchläuft.

Zusammenfassung

n_0 = Anzahl der Pole des offenen Regelkreises

n_{g} = Anzahl der Pole des geschlossenen Regelkreises

m_0 = Anzahl der Pole des offenen Regelkreises, die in der *rechten* Halbebene liegen

Sonderfälle

a) Bei realen Systemen ist der Zählergrad nicht größer als der Nennergrad der Übertragungsfunktion. In einem solchen Fall folgt aus Lücke 17:

$$n_{\mathrm{g}} = n_0$$

Damit reduziert sich die Bedingung für asymptotische Stabilität auf

$$\Delta\varphi = m_0\pi \tag{5}$$

b) Ist zusätzlich der *offene Kreis stabil,* das heißt $m_0 = 0$, so bleibt nur noch die Bedingung

$$\Delta\varphi = 0 \tag{6}$$

Zum Beispiel ist in den beiden Diagrammen in Abbildung 4 $\Delta\varphi = 0$. In dieser *einfachsten Form* des Nyquist-Kriteriums ist es die *Linke-Hand-Regel*. Diese besagt, dass im Falle der *asymptotischen Stabilität* der kritische Punkt $(-1, 0)$ *links* der Ortskurve von $H(\mathrm{i}\,\omega)$ – in Richtung wachsender ω liegt. Die *Linke-Hand-Regel* hat also als Voraussetzungen $n_{\mathrm{g}} = 0$ und $m_0 = 0$. Für $n_{\mathrm{g}} = n_0$ und m_0 wäre also im Falle der Diagramme in Abbildung 4 der geschlossene Regelkreis stabil.

Nyquist-Verfahren bei Totzeitsytemen

Für die Anwendung des Nyquist-Verfahrens auf Totzeitsysteme gilt folgender Satz:

Gegeben sei ein Regelkreis mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) \cdot \mathrm{e}^{-sT_t}$$

für den offenen Kreis. Dabei soll $H(s)$ eine rationale Funktion in s sein, deren Nennergrad *nicht kleiner* als der Zählergrad ist. Wenn m_0 die Zahl der Pole des offenen Kreises ist, die in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ liegen, so lautet die Stabitilätsbedingung für den geschlossenen Kreis:

$$\Delta\varphi = m_0\pi$$

Allgemeines Nyquist-Kriterium bei Polen auf i-Achse (I-Anteile)

Ein *geschlossener* Regelkreis ist *asymptotisch stabil,* wenn der Zeiger, der vom kritischen Punkt $(-1, 0)$ zur Ortskurve des *offenen* Kreises verläuft, bei einer

Variation von $\omega = 0$ bis $\omega = +\infty$ den Winkel

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= m_0\pi + j_0\frac{\pi}{2} \\ j_0 &= \text{Anzahl der Pole auf der i-Achse} \end{aligned}$$

durchläuft.

Literatur

[FPE10] Gene F. Franklin, J. David Powel und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Pearson Prentice Hall, 2010.

[Unb08] Heinz Unbehauen. *Regelungstechnik I*. 15. Auflage. Vieweg und Teubner, 2008.