

4 Polstellenlage und Frequenzgang

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 31. Juli 2014, 12:57

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1	Bedeutung der Polstellenlage in der s-Ebene	1
1.1	System 1. Ordnung (PT_1 -Glieder)	2
1.2	System 2. Ordnung, PT_2 -Glieder	2
1.3	Übersicht Impulsantworten abhängig von der Polstellenlage	4
1.4	Kenngrößen im Zeitbereich	5
1.5	Effekt einer zusätzlichen Nullstelle in der LHE	6
2	Frequenzgang	7

1 Bedeutung der Polstellenlage in der s -Ebene

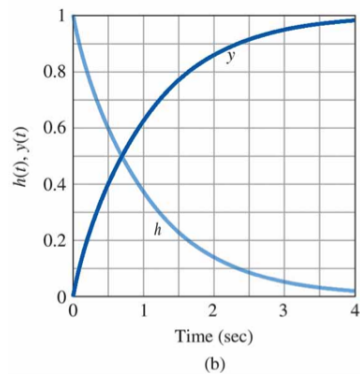
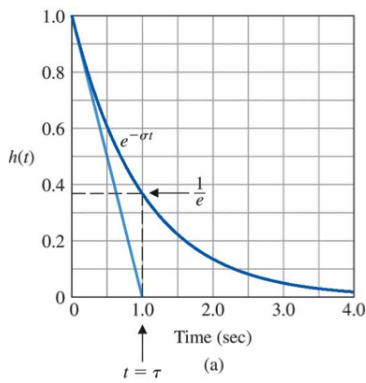
Sobald die Übertragungsfunktion mit einer der verfügbaren Methoden bestimmt ist, können wir mit der Analyse des dynamischen Verhaltens beginnen. Wenn die Systemgleichungen lineare gewöhnliche Differentialgleichungen sind, dann ist die resultierende Übertragungsfunktion gebrochenrational, das heißt sie hat die Form

1

Der Bruch sei gekürzt, Zähler und Nenner haben somit keine gemeinsamen Nullstellen. Die Nullstellen des Nenners heißen *Pole*. Die *Nullstellen* und *Pole* beschreiben, bis auf einen konstanten Faktor, *vollständig* das Systemverhalten. Weil die Impulsantwort die korrespondierende Zeitfunktion zur Übertragungsfunktion ist, heißt sie auch *natürliche Antwort* des Systems.

1.1 System 1. Ordnung (PT₁-Glied)

2



1.2 System 2. Ordnung, PT₂-Glied

Komplexe Polpaare $s = -\sigma \pm i\omega_d$ korrespondieren zum Nenner

3

Übertragungsfunktionen mit komplexen Polen liegen häufig in der Form

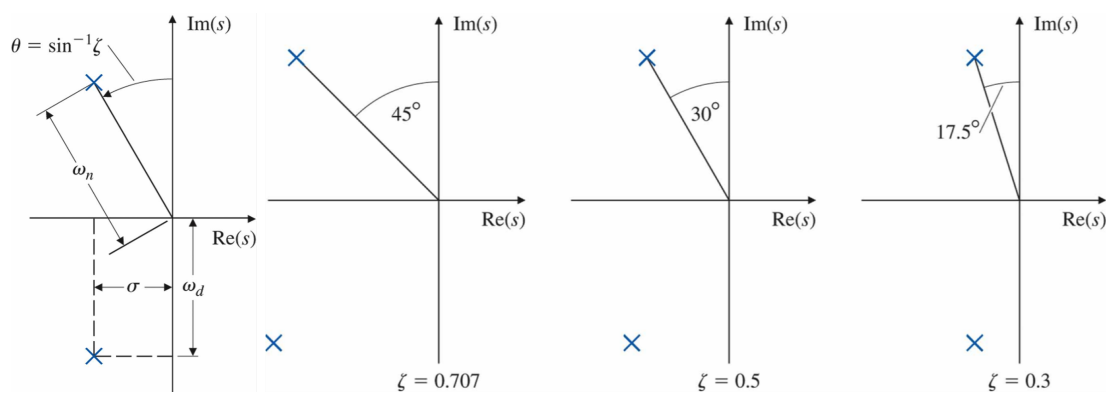
$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

1 Bedeutung der Polstellenlage in der s -Ebene

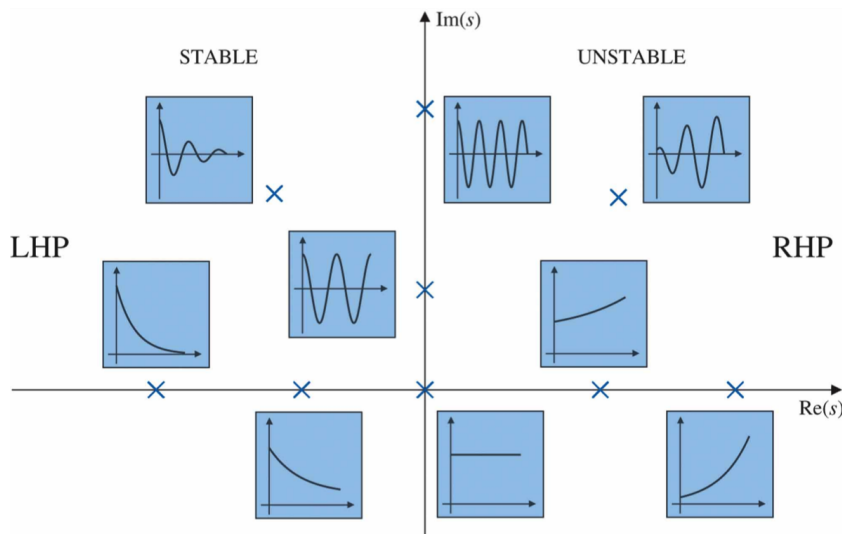
vor. Ein Koeffizientenvergleich ergibt

4

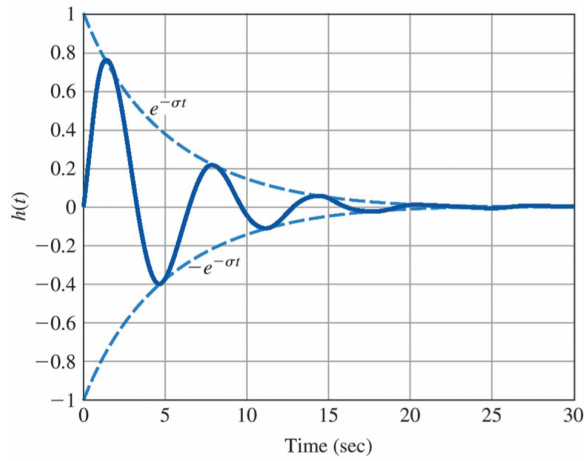
Die Pole dieser Übertragungsfunktion liegen somit auf einem Radius von ω_n in der s -Ebene mit einem Winkel von $\theta = \arcsin \zeta$. Je kleiner der Winkel θ ist, desto kleiner ist die Dämpfung. (Bilder aus ([FPE08, Fig. 3.17 und 3.19]))



1.3 Übersicht Impulsantworten abhängig von der Polstellenlage

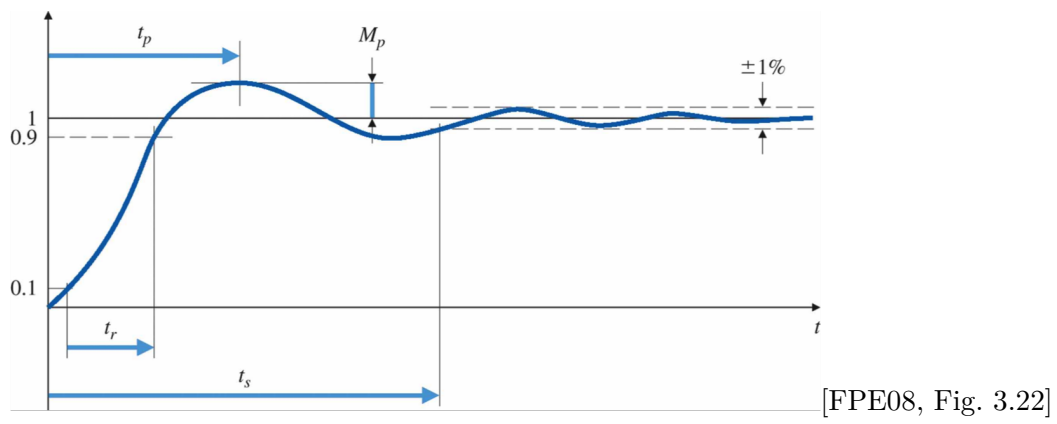


([FPE08, Fig. 3.15])



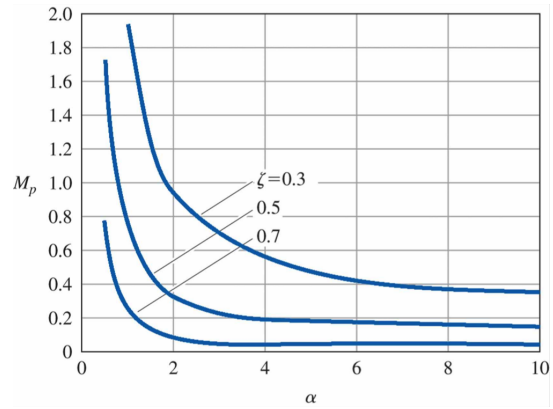
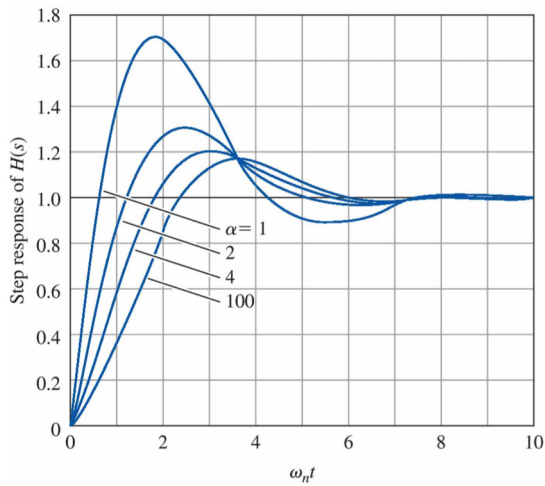
Exponentiell abklingende Impulsantwort eines Systems 2. Ordnung ([FPE08, Fig. 3.20]). Das Abklingen ist bestimmt durch $\sigma = \omega_n \zeta$.

1.4 Kenngrößen im Zeitbereich



7

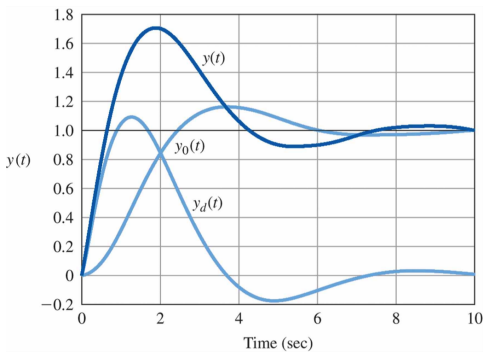
1.5 Effekt einer zusätzlichen Nullstelle in der LHE



Sprungantworten von Systemen 2. Ordnung mit einer Nullstelle in Abhängigkeit der normierten Nullstellenlage α ($\zeta = 0.5$) [FPE08, Fig. 3.26]

Überschwingen als Funktion der normierten Nullstellenlage α . Für $\alpha = 1$ stimmt der Realteil von Null- und Polstellen überein. [FPE08, Fig. 3.26]

8



[FPE08, Fig. 3.28]

9

2 Frequenzgang

Stationäre Antwort eines linearen Systems auf sinusförmigen Eingang.

10 _____ 11 _____
Euler: | _____ , Eingang: | _____

Berechnung der Antwort durch Faltung und Superposition:

12 _____

Das Ergebnis beinhaltet also die komplexe Übertragungsfunktion $H(i\omega)$, die auch in polarer Form mit Betrag und Phase als $H(i\omega) = M(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$, oder einfach $H = Me^{i\varphi}$ dargestellt werden kann. Mit dieser Substitution folgt

13 _____

Der Frequenzgang lässt sich auf zwei Arten graphisch darstellen:

- Als Betrag und Phase in Abhängigkeit von $\omega \Rightarrow$ Bode-Diagramm
- In der komplexen Ebene \Rightarrow Nyquist-Diagramm

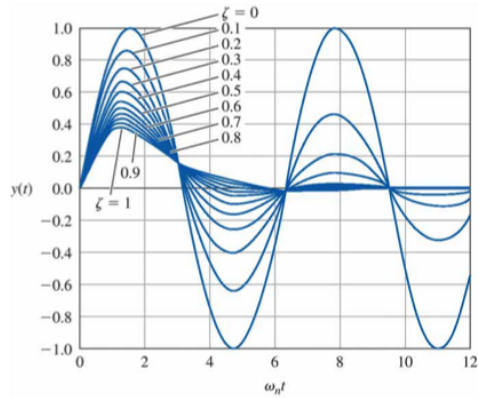
Literatur

MATLAB[®]-Beispiel für Bode-Plot von $H(s) = \frac{1}{s+k}$ mit $k = 1$:

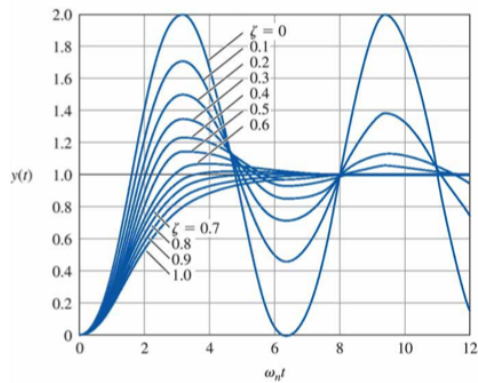
```
1 k=1;
2 numH=1;           % Zähler
3 denH=[1 k];      % Nenner
4 sysH=tf(numH,denH) % Definition der Ü-Funktion
5 w=logspace(-2,2); % 50 Frequenzwerte von 10-2 bis 102
6 bode(sysH,w);     % Bode-Plot erzeugen
```

Literatur

- [FPE08] Gene F. Franklin, J. David Powell und Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th international edition. Addison-Wesley, 2008.



(a)



(b)

Impuls- und Sprungantworten von Systemen 2. Ordnung ([FPE08, Fig. 3.18])

Mit Lücke 4 lässt sich die Übertragungsfunktion schreiben als

5 _____

Für die Impulsantwort ergibt sich aus der Korrespondenztabelle somit

6 _____

Die Sprungantwort lässt sich mit der Korrespondenz

$$\frac{\sigma^2 + \omega_d^2}{s((s + \sigma)^2 + \omega_d^2)} \bullet \circ 1 - e^{-\sigma t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right)$$

berechnen. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Impuls- und Sprungantworten von Systemen 2. Ordnung mit komplexen Polen.