8 Signifikanztests Teil 2

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 12. April 2016, 11:27

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Differenztests [Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.3.2]

- Gegeben
  - Zwei verbundene einfache Stichproben

    1 $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$

  - mit 2 $\mathrm{E}(X_i) = \mu_1$, $\mathrm{E}(Y_i) = \mu_2$

- Hypothesenpaare:

3

a) $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ $\quad H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$

b) $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ (oder $\mu_1 \geq \mu_2$) $H_1\colon \mu_1 < \mu_2$

c) $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ (oder $\mu_1 \leq \mu_2$) $H_1\colon \mu_1 > \mu_2$

- „Trick“:
  - Übergang zu 4 $Z_i = X_i - Y_i$
  - mit 5 $\mathrm{E}(Z_i) = \mu = \mu_1 - \mu_2$

$\Rightarrow$ Einstichprobentests mit $\mu_0 = 0$:

6

a) $H_0\colon \mu = 0$ $\quad H_1\colon \mu \neq 0$

b) $H_0\colon \mu = 0$ (oder $\mu \geq 0$) $H_1\colon \mu < 0$

c) $H_0\colon \mu = 0$ (oder $\mu \leq 0$) $H_1\colon \mu > 0$

- Änderung gegenüber Einstichproben-t- und approximativem Gauß-Test:
  Berechnung der Testfunktion v in Schritt 2:

Voraussetzung	anzuwendender Test	Testfunktionswert
Z_i normalverteilt	Einstichproben-t-Test	7 $v = \dfrac{\bar{z}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}}\sqrt{n}$
X_i, Y_i dichotom mindestens 5 der $z_i > 0$ mindestens 5 der $z_i < 0$	approximativer Gaußtest	$v = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}}$
Z_i beliebig verteilt $n > 30$	approximativer Gaußtest	$v = \dfrac{\bar{z}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2}}\sqrt{n}$

- Alternative Berechnugnsmöglichkeit für v, falls X_i, Y_i dichotom:

8 $$v = \frac{h_{10} - h_{01}}{\sqrt{h_{10} + h_{01}}} \text{ mit } \begin{array}{c|cc} & y=0 & y=1 \\ \hline x=0 & h_{00} & h_{01} \\ x=1 & h_{10} & h_{11} \end{array}$$

Bedingungen an z_i dann: 9 $h_{01} \geq 5$ und $h_{10} \geq 5$

- Beispiel: Aufgabe 14.12 in [BBK12]:
  500 zufällig ausgewählten Bundesbürgern wurden die beiden Fragen vorgelegt, ob sie
  a) den Bau weiterer Kernkraftwerke befürworten oder ablehnen,
  b) ein Energiesparprogramm für notwendig erachten oder nicht.

  Dabei ergaben sich folgende Daten: 236 Personen befürworten den KKW-Bau, von denen 71 das Sparen befürworten. Insgesamt befürworteten 217 Personen das Sparen.

  Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese H_0, dass die Anteile p_1 bzw. p_2 der Personen, die den Bau weiterer Kernkraftwerke ablehnen bzw. ein Energisparprogramm für notwendig ansehen, gleich groß sind gegen H_1: $p_1 > p_2$

  Lösung: Definition der Zufallsvariablen X_i, Y_i mit:

10 $$X_1, \dots, X_{500} \sim B(1, p_1) \text{ mit } X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-te Person lehnt KKW-Bau ab} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

11 $$Y_1, \dots, Y_{500} \sim B(1, p_2) \text{ mit } X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-te Person befürwortet Sparen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

12

	$y_i = 0$	$y_i = 1$	$\sum$
$x_i = 0$	165	71	236
$x_i = 1$	118	146	264
$\sum$	283	217	500

Hypothesenpaar: 13 H_0: $p_1 = p_2$, H_1: $p_1 > p_2$

Fall: 14 Differenztest auf Basis approx. Gaußtest, Fall c)

Voraussetzungen 15 erfüllt: $h_{01} = 71 \geq 5$, $h_{10} = 118 \geq 5$

1. 16 $\alpha = 0.05$

2. 17 $v = \dfrac{118 - 71}{\sqrt{118 + 71}} = 3.42$

3. 18 $N(0,1)$: $x_{1-\alpha} = x_{0.95} = 1.645 \Rightarrow B = (1.645, \infty)$

4. 19 $v \in B \Rightarrow H_0$ verwerfen

Interpretation: Zum Signifikanzniveau 5 % kann statistisch bestätigt werden, dass der Anteil der KKW-Gegner größer als der der Sparbefürworter ist.

2 χ^2 -Test für die Varianz [Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.4]

- Gegeben: einfache Stichprobe 20 $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma)$
- Hypothesenpaare:

21

a) H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

b) H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (oder $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$) H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

c) H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (oder $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$) H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Ein Signifikanzniveau 22 α festlegen.

Schritt 2: Testfunktionswert v in Abhängigkeit von μ bekannt / unbekannt berechnen:

23

$$v = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_0^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 & \text{für } \mu \text{ bekannt} \\ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 & \text{für } \mu \text{ unbekannt} \end{cases}$$

Schritt 3: Verwerfungsbereich festlegen:

24

$B = [0, x_{\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}, \infty)$ im Fall Lücke 21a)

$B = [0, x_{\alpha})$ im Fall Lücke 21b)

$B = (x_{1-\alpha}, \infty)$ im Fall Lücke 21c)

Fraktilswerte entnehmen aus

- 25 $\chi^2(n)$ -Verteilung bei μ bekannt
- 26 $\chi^2(n-1)$ -Verteilung bei μ unbekannt

Schritt 4: H_0 genau dann ablehnen, wenn 27 $v \in B$ gilt

- Beispiel ([Pap11, Seite 592]): Bei der Serienherstellung von Schrauben mit einer bestimmten Länge kann die Zufallsvariable

  $X =$ *Länge einer Schraube*

  als eine normalverteilte Größe betrachtet werden. Aufgrund langjähriger Erfahrungen weiß man, dass die Standardabweichung einen Wert von $\sigma_0 = 1.2$ mm besitzt. Eine zu Kontrollzwecken entnommene Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 25$ ergab jedoch eine empirische Standardabweichung von $s = 1.5$ mm. Kann diese Abweichung noch durch *zufällige* Schwankungen erklärt werden, oder ist sie bei einem Signifikanznivau von 1 % *signifikant*?

  Hypothesenpaar 28
  H_0: $\sigma^2 \le \sigma_0^2 = 1.44\,\text{mm}^2$,
  H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2 = 1.44\,\text{mm}^2$

  Fall: 29 Lücke 21c)

30
1. $\alpha = 0.01$

31
2. $v = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(25-1)\cdot 1.5^2}{1.44} = 37.5$

32
3. $\chi^2(n-1)$: $x_{1-\alpha} = x_{0.99} = 43$
$\Rightarrow B = (43, \infty)$

33
4. $v = 37.5 \notin B = (43, \infty) \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen,
Abweichung $s = 1.5\,\text{mm}$ bzw. $s^2 = 2.25\,\text{mm}^2$
von $\sigma_0 = 1.2\,\text{mm}$ bzw. $\sigma_0^2 = 1.44\,\text{mm}^2$
ist auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ zufallsbedingt

3 Zweistichprobentests [Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.3.3]

- Gegeben:
  - Zwei unabhängige einfache Stichproben

    34
    $X_1, \dots, X_{n_1}$ und $Y_1, \dots, Y_{n_2}$

    mit
  - Stichprobenumfängen 35 n_1 und n_2
  - Erwartungswerten 36 $\mathrm{E}(X_i) = \mu_1$ und $\mathrm{E}(X_i) = \mu_1$
  - Varianzen 37 $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_1^2$ und $\mathrm{Var}(Y_i) = \sigma_2^2$

– Stichprobenmittel [38] $\bar{X}$ und $\bar{Y}$

– Stichprobenvarianzen [39] S_1^2 und S_2^2

- Gesucht: Aussagen über den Vergleich der Erwartungswerte
- Hypothesenpaare:

[40]

a) $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ $\quad H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$

b) $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ (oder $\mu_1 \geq \mu_2$) $H_1\colon \mu_1 < \mu_2$

c) $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$ (oder $\mu_1 \leq \mu_2$) $H_1\colon \mu_1 > \mu_2$

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Ein Signifikanzniveau [41] α festlegen.

Schritt 2: Testfunktionswert v gemäß Tabelle 1 auf Seite 8 berechnen

Schritt 3: Verwerfungsbereich festlegen:

[42]

$B = (-\infty, x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}, \infty)$ im Fall Lücke 40a)

$B = (-\infty, -x_{1-\alpha})$ im Fall Lücke 40b)

$B = (x_{1-\alpha}, \infty)$ im Fall Lücke 40c)

Fraktilswerte aus der Spalte „Verteilung von V unter $\mu_1 = \mu_2$“ in Tabelle 1 entnehmen.

Schritt 4: H_0 genau dann ablehnen, wenn [43] $v \in B$ gilt

Tabelle 1: Testfunktionen zum Vergleich zweier Erwartungwerte

	Voraussetzung	Testfunktion V	Verteilung von V unter $\mu_1 = \mu_2$	
1.	$X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ $Yi \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ σ_1, σ_2 bekannt	44 $\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0, 1)$	Zweistichproben-Gaußtest
2.	$X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ σ_1, σ_2 unbekannt, aber $\sigma_1 = \sigma_2$	$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 \cdot n_2}}}$	$t(n_1 + n_2 - 2)$ (für $n_1 + n_2 > 32$ Fraktile aus $N(0, 1)$)	Zweistichproben-t-Test
3.	$X_i \sim B(1, p_1)$ $Y_i \sim B(1, p_2)$ $5 \leq \sum x_i \leq n_1 - 5$ $5 \leq \sum y_i \leq n_2 - 5$	$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(\sum X_i+\sum Y_i)\cdot(n_1+n_2-\sum X_i-\sum Y_i)}{(n_1+n_2)\cdot n_1 \cdot n_2}}}$	approximativ $N(0, 1)$	approximativer Zweistichproben-Gaußtest
4.	X_i, Y_i beliebig verteilt $n_1 > 30, n_2 > 30$	45 $\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	approximativ $N(0, 1)$	approximativer Zweistichproben-Gaußtest

- Beispiel: Zwei Werkzeugmaschinen sollen anhand Ihrer Ausschussrate verglichen werden. Es werden zwei unabhängige Stichproben genommen: 80 Teile von Maschine 1, von denen 20 Ausschuss sind und 100 Teile von Maschine 2, von denen 50 Ausschuss sind. Lässt sich zum Signifikanzniveau 10 % anhand dieser Stichproben nachweisen, dass Maschine 1 weniger Ausschuss als Maschine 2 liefert?
  - Zufallsvariablen, Verteilung:

46

$$X_1, \dots, X_{80} \sim B(1, p_1) \text{ mit } X_i = \begin{cases} 1 & \text{Teil } i \text{ Ausschuss} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Y_1, \dots, Y_{100} \sim B(1, p_1) \text{ mit } Y_i = \begin{cases} 1 & \text{Teil } i \text{ Ausschuss} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

47

mit $\sum_{i=1}^{80} x_i = 20$ und $\sum_{i=1}^{100} y_i = 50$

  - Hypothesenpaar: 48 H_0: $p_1 \geq p_2$ gegen H_1: $p_1 < p_2$
  - Fall: 49 Approx. Zweistichproben-Gaußtest, Fall Lücke 40b)
  - Voraussetzung gemäß Tabelle 1:

50 Nr. 3. erfüllt: $5 \leq 10 \leq 75$, $5 \leq 50 \leq 95$

  - 1. 51 $\alpha = 0.1$

2. 52

$$\bar{x} = \frac{20}{80} = 0.25, \bar{y} = \frac{50}{100} = 0.5$$

$$v = \frac{0.25 - 0.5}{\sqrt{\frac{(20+50)(80+100-20-50)}{(80+100)\cdot 80 \cdot 100}}} = -3.42$$

3. 53 $N(0,1)$: $x_{1-\alpha} = x_{0.9} = 1.282 \Rightarrow B = (-\infty, -1.282)$

4. 54 $v \in B \Rightarrow H_0$ verwerfen, d.h. $p_1 < p_2$ bestätigen

4 χ^2-Anpassungstest [Pap11, Teil III, Kapitel 5.3]

- Gegeben: Einfache Stichprobe [55] $X_1, \dots, X_n$ mit Verteilungsfunktion F
- Hypothesenpaar:

[56] H_0: $F = F_0$ (hypothetische Verteilungsfunktion)
H_1: $F \neq F_0$

- Grundgedanke:

  Unterteile die [57] Merkmalsachse in möglichst viele [58] Intervalle und vergleiche für jedes [59] Intervall die tatsächliche mit der theoretischen (aus F_0 errechneten) [60] Häufigkeit
- Vorgehensweise

Schritt 1: Ein Signifikanzniveau [61] α festlegen.

Schritt 2: Den Testfunktionswert v wie folgt ermitteln:

2.1: Die x-Achse in $k \geq 2$ disjunkte, aneinander angrenzende Intervalle

[62] $A_1 = (-\infty, z_1], A_2 = (z_1, z_2], \dots, A_k = (z_{k-1}, \infty)$

unterteilen.

2.2: Für jedes [63] $j = 1, \dots, k$ die Anzahl h_j der in A_j liegenden Stichprobenwerte notieren.

2.3: Für jedes [64] $j = 1, \dots, k$ die Wahrscheinlichkeit

[65] $p_j = P(X \in A_j | F_0)$ berechnen, das heißt dass ein Beobachtungswert zum Merkmal X in das Intervall A_j fällt, wenn $G \sim F_0$ bezüglich X ist.

2.4: Testfunktionswert berechnen:

[66]
$$v = \sum_{j=1}^{k} \frac{(h_j - np_j)^2}{np_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{h_j^2}{p_j} - n$$

Schritt 3: Mit dem Fraktilswert [67] $x_{1-\alpha}$ der [68] $\chi^2(k-1)$ -Verteilung den Verwerfungsbereich [69] $B = (x_{1-\alpha}, \infty)$ festlegen.

Schritt 4: H_0 genau dann ablehnen, wenn [70] $v \in B$ gilt.

- Bemerkungen:
  - (i) Test nur anwendbar, wenn
    [71] $np_j \geq 5$ bzw. $h_j \geq 5$ für alle $j = 1, \ldots, k$
    Falls nicht erfüllt ⇒ Intervalle zusammenlegen!
  - (ii) Im Allgemeinen sinkt die Wahrscheinlichkeit für [72] Fehler 2. Art , wenn k steigt.
  - (iii) Falls diskrete Verteilung:
    - pro Ausprägung ein Intervall, falls (i) erfüllt
    - Schritt 2.1 entfällt

- Beispiel: Gegeben ist folgendes Stichprobenergebnis:

a_j	0	1	2	3	4	5
h_j	1	2	5	6	8	8

Prüfe zum Signifikanzniveau 5 %, ob $G \sim B(20, 0.15)$ gilt. Voraussetzung [73] $30p_j \geq 5$ prüfen wir in Schritt 2.3.

1. [74] $\alpha = 0.05$

2. Testfunktionswert v berechnen:

   2.1 [75] A_j gegeben (sofern Voraussetzung Lücke 71 erfüllt)

   2.2 [76] h_j gegeben (sofern Voraussetzung Lücke 71 erfüllt)

77

2.3

$$
\begin{aligned}
p_1 &= P(X \leq 0|F_0) &&= F_0(0) && &&= 0.0388\\
p_2 &= P(0 < X \leq 1|F_0) &&= F_0(1) &&-F_0(0) &&= 0.1756 - 0.0388 = 0.1368\\
p_3 &= P(1 < X \leq 2|F_0) &&= F_0(2) &&-F_1(1) &&= 0.4049 - 0.1756 = 0.2293\\
p_4 &= P(2 < X \leq 3|F_0) &&= F_0(3) &&-F_2(2) &&= 0.6477 - 0.4049 = 0.2428\\
p_5 &= P(3 < X \leq 4|F_0) &&= F_0(4) &&-F_0(3) &&= 0.8298 - 0.6477 = 0.1821\\
p_6 &= P(X \geq 5|F_0) &&= 1 &&-F_0(4) &&= 1.0000 - 0.8298 = 0.1702
\end{aligned}
$$

a_j	0	1	2	3	4	5
h_j	1	2	5	6	8	8
p_j	0.0388	0.1368	0.2293	0.2428	0.1821	0.1702
$30p_j$	1.164	4.104	6.879	7.285	5.463	5.106

78

Die ersten beiden Intervalle erfüllen $30p_j \geq 5$ nicht!

$\Rightarrow$ Zusammenlegen!

A_j	$(-\infty, 1]$	$(1, 2]$	$(2, 3]$	$(3, 4]$	$(4, \infty]$
h_j	3	5	6	8	8
p_j	0.1756	0.2293	0.2428	0.1821	0.1702

79

2.4

$$v = \frac{1}{30}\left(\frac{3^2}{0.1756} + \frac{5^2}{0.2293} + \frac{6^2}{0.2428} + \frac{8^2}{0.1821} + \frac{8^2}{0.1702}\right) - 30 = 4.53$$

80

3. $\chi^2(4)$: $x_{1-\alpha} = x_{0.95} = 9.49 \Rightarrow B = (9.49, \infty)$

81

4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen.

Literatur

[BBK12] Günter Bamberg, Franz Baur und Michael Krapp. *Statistik*. 17. Auflage. Oldenbourg Verlag, 2012.

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.