⑦ Signifikanztests Teil 1

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 30. April 2015, 12:50

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

- Prüfe Hypothese über Verteilung(en) der Grundgesamtheit(in), zum Beispiel
  - „Ein Würfel ist fair“
  - „Die Brenndauern zweier Glühbirnensorten sind gleich“

- Überprüfung anhand von Stichprobe(n)
- Prinzip:
  - Verwerfung bei [1] „signifikantem“ Widerspruch zur Stichprobe
  - Ansonsten: Hypothese [2] beibehalten
- Eine verworfene Hypothese gilt als [3] statistisch widerlegt

  Beibehaltung ≙ [4] „Freispruch aus Mangel an Beweisen“

$\Rightarrow$ Beibehaltung ist [5] kein „statistischer Beweis“ der Hypothese

- Trick: [6] Hypothese falsch $\Leftrightarrow$ Gegenhypothese wahr

2 Einführung/Einstichproben-Gaußtest ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.1])

- Voraussetzungen:
  - [7] $G \sim N(\mu, \sigma)$ mit σ bekannt
  - Einfache Stichprobe [8] $X_1, \ldots, X_n$
  - (Null-)Hypothese [9] H_0: $\mu = \mu_0$
- Beispiel: $X_1, \ldots, X_{25}$ mit X_i = Füllmenge der i-ten Flasche $\sim N(\mu, 1.5)$

  Nullhypothese: [10] H_0: $\mu = 500$ das heißt $\mu_0 = 500$

- Je nach Interessenlage sind unterschiedliche *Gegenhypothesen* möglich:

  a) [11] H_1: $\mu \neq \mu_0$

b) 12 $H_1\colon \mu < \mu_0$

c) 13 $H_1\colon \mu > \mu_0$

- Wirksamster erwartungstreuer Schätzer für μ: 14 $\bar{X}$

$\Rightarrow$ Entscheidung:

$H_0 : \mu = \mu_0$ wird abgelehnt gegenüber

a) 15 $H_1\colon \mu \neq \mu_0$, wenn $|x - \mu_0|$ „sehr groß“ ist

b) 16 $H_1\colon \mu < \mu_0$, wenn $\bar{x} - \mu_0 \ll 0$ ist

c) 17 $H_1\colon \mu > \mu_0$, wenn $\bar{x} - \mu_0 \gg$ ist

- Alternatives Kriterium (statt 18 $\bar{x} - \mu_0$):

19
$$v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

- Vorteil: Verteilung bekannt, falls $\mu = \mu_0$, das heißt H_0 wahr:

20
$$V = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow$ Dann: $H_0 : \mu = \mu_0$ wird abgelehnt gegenüber

a) 21 $H_1\colon \mu \neq \mu_0$, wenn $|v|$ „sehr groß“ ist

b) 22 $H_1\colon \mu < \mu_0$, wenn $v \ll 0$ ist

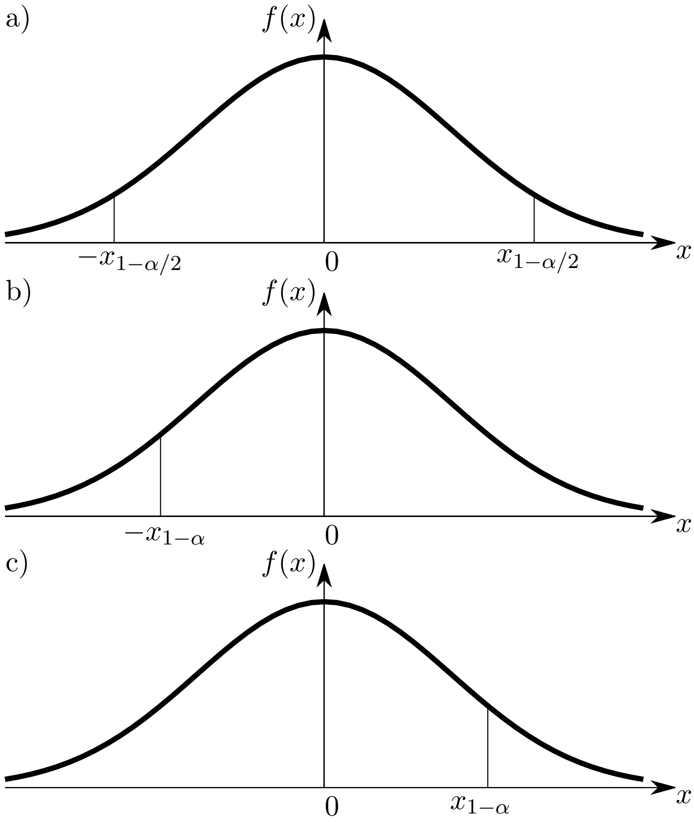
c) 23 $H_1\colon \mu > \mu_0$, wenn $v \gg 0$

- Mögliche Fehlentscheidungen (siehe auch [Pap11, Teil III, Kapitel 4.4, Seite 550]):
  - Ablehnung von H_0, obwohl H_0 richtig ist: 24 *Fehler 1. Art*
  - Nicht-Ablehnung von H_0, obwohl H_0 falsch ist: 25 *Fehler 2. Art*
- Maximal erlaubte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art:
  26 Signifikanzniveau α
- Mit 27 α lässt sich festlegen, was „sehr groß“ usw. heißt:
- Fehler 1. Art im Fall a):
  28 $|v| > x$ obwohl $\mu = \mu_0$, d.h. $V \sim N(0,1)$
- Wahrscheinlichkeit dafür:
  29

$$
\begin{aligned}
P(|V| > x) &= P(V > x) + P(V < -x) \\
&= 2 \cdot P(V > x) \qquad \text{(Symmetrie der Normalverteilung)} \\
&= 2 \cdot (1 - P(V \leq x)) = 2 \cdot (1 - \Phi(x)) \overset{!}{=} \alpha \\
\Phi(x) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \\
\Leftrightarrow x &= x_{1-\alpha/2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Verwerfung $\Leftrightarrow$ 30 $|v| > x_{1-\alpha/2} \Leftrightarrow v \in B$

- Verwerfungsbereich: 31 $B = (-\infty, -x_{\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}, \infty)$
- Analoge Vorgehensweise für die Fälle b) und c)



- Insgesamt: Verwerfung $\Leftrightarrow$ [32] $v \in B$, wobei

[33]

$$B = (-\infty, -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}, \infty) \qquad \text{im Fall a)}$$
$$B = (-\infty, -x_{1-\alpha/2}) \qquad \text{im Fall b)}$$
$$B = (x_{1-\alpha}, \infty) \qquad \text{im Fall c)}$$

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Ein Signifikanzniveau [34] α wird festgelegt.

Schritt 2: Der Testfunktionswert [35] $v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ wird errechnet.

Schritt 3: Der Verwerfungsbereich

36

$$B = (-\infty, -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}, \infty) \qquad \text{im Fall a)}$$
$$B = (-\infty, -x_{1-\alpha}) \qquad \text{im Fall b)}$$
$$B = (x_{1-\alpha}, \infty) \qquad \text{im Fall c)}$$

wird festgelegt, wobei $x_{1-\alpha/2}$ und $x_{1-\alpha}$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$ und das $(1-\alpha)$Fraktil der 37 $N(0,1)$ Verteilung ist.

Schritt 4: H_0 wird genau dann verworfen, wenn 38 $v \in B$ gilt.

- Beispiel von oben: $X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i = X_i \sim N(\mu, 1.5)$ und $\bar{x} = 499.28$

  Prüfe $H_0 : \mu = 500$, 39 $H_1{:}\mu \neq 500$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$

  Fall: 40 Einstichproben-Gaußtest, Lücke 36 Fall a)

  1. 41 $\alpha = 0.01$

  2. 42 $v = \dfrac{499.28 - 500}{1.5}\sqrt{25} = -2.4$

  3. 43
  $$N(0,1) : x_{1-\alpha/2} = x_{0.995} = 2.576$$
  $$\Rightarrow B = (-\infty, -2.576) \cup (2.576, \infty)$$

  4. 44 $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

  Interpretation: Zum Signifikanzniveau 1 % kann der Brauerei 45 keine Abweichung vom Sollwert $\mu_0 = 500$ nachgewiesen werden.

- Entscheidung ebenfalls mithilfe von Schätzintervall möglich:

  Berechne, wenn α das Signifikanzniveau ist, ein symmetrisches Schätzintervall 46 $[\vartheta_u, \vartheta_o]$ für ϑ zum Konfidenzniveau 47 $1-\alpha$ und lehne

[48] $H_0\colon \vartheta = \vartheta_0$ gegen $H_1\colon \vartheta \neq \vartheta_0$

genau dann ab, wenn [49] ϑ_0 nicht in $[\vartheta_u, \vartheta_o]$ liegt

Hier: Intervall für μ:

1. [50] $1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.99$
2. [51] $N(0,1)$: $c = x_{1-\alpha/2} = x_{0.995} = 2.576$
3. [52] $\bar{x} = 499.28$
4. [53] $\dfrac{\sigma c}{\sqrt{n}} = \dfrac{1.5 \cdot 2.576}{\sqrt{25}} = 0.77$
5. [54] $[499.28 - 0.77, 499.28 + 0.77] = [498.51, 500.05]$

[55] $\mu_0 = 500 \in [498.51, 500.0] \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

3 Aufbau von Signifikanztests

- 1. Ein [56] Signifikanzniveau α, das die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der es zu einer fälschlichen Ablehnung von H_0 kommen darf,
  2. eine Stichprobenfunktion (= Testfunktion) [57] V
  3. einen Verwerfungsbereich [58] B,
  4. die Entscheidungsregel: lehne H_0 genau dann ab, wenn die Realisierung [59] v der Testfunktion [60] V im Verwerfungsbereich [61] B liegt.
- Statistik-Software:

- verlangt *keine* Vorgabe des Signifikanzniveaus α
- Stattdessen: Ausgabe des [62] p-Value α'
- [63] α' ist das kleinste Signifikanzniveau, zu dem H_0 abgelehnt werden würde (bei dieser Stichprobe)
- Entscheidungsregel:

  [64] $\alpha' \leq \alpha \Rightarrow H_0$ verwerfen
  $\alpha' > \alpha \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

4 Klassifikation

1. Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe
   - Eine Stichprobe, ein Merkmal
   - Beispiel: „Ist die erwartete Füllmenge gleich 500 ml“
   - In der Vorlesung behandelte Tests bei einer einfachen Stichprobe:
     - [65] H_0: $\mu = \mu_0$, $G \sim N(\mu, \sigma)$ oder $G \sim B(1, p)$
       * Einstichproben-Gaußtest, σ [66] bekannt
         (Kapitel 2 und [Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.1])
       * Einstichproben-t-Test und approximativer Gaußtest, σ [67] unbekannt
         (Kapitel 5 und [Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.2, 4.5.5])
     - [68] H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$: χ^2-Test für die Varianz
       ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.4])
     - [69] H_0: $F = F_0$: χ^2-Anpassungstest
       ([Pap11, Teil III, Kapitel 5.3])
2. Signifikanztests bei unabhängigen Stichproben
   - Mehrere (zwei) disjunkte Stichproben, ein Merkmal
   - Beispiel: „Hängt die Abiturnote vom Beruf des Vaters ab?“

- In der Vorlesung behandelte Tests bei unabhängigen Stichproben ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.3.3]):
  - Zweistichproben-Gaußtest, σ^2 70 bekannt
  - Zweistichproben-t-Test und approximativer Gaußtest, σ^2 71 unbekannt

3. Signifikanztests bei verbundenen Stichproben
   - Eine Stichprobe, zwei Merkmale
   - Beispiel: „Besteht ein Zusammenhang zwischen Alter und Einkommen?“
   - In der Vorlesung behandelte Tests bei verbundenen Stichproben ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.3.2]):

72
H_0: $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow$, Differenztest
H_0: X, Y sind unabhängig

$$\begin{cases} X, Y \sim \text{beliebig} & \text{Kontingenztest} \\ X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2) & \text{Korrelationstest} \end{cases}$$

5 Einstichproben-t-Test und approximativer Gaußtest ([Pap11, Teil III, Kapitel 4.5.2 und 4.5.5]))

- Gegeben:
  - Einfache Stichprobe 73 $X_1, \dots, X_n$ mit
  - 74 $\mathrm{E}(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$
- Einstichprobentests:

75
a) H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu \neq \mu_0$
b) H_0: $\mu \geq \mu_0$ H_1: $\mu < \mu_0$
c) H_0: $\mu \leq \mu_0$ H_1: $\mu > \mu_0$

- Voraussetzungen

1. 76 $N \sim N(\mu, \sigma)$ mit σ unbekannt

(Einstichproben-t-Test)

oder

2. Beliebige Verteilung mit

77 $n > 30$ oder $5 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n - 5$ falls $G \sim B(1, p)$

(approximativer Gaußtest)

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Ein Signifikanzniveau 78 α wird festgelegt.

Schritt 2: Der Testfunktionswert v wird errechnet, nämlich gemäß:

79

$$v = \begin{cases} \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} & \text{unter Voraussetzung 1.} \\ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} & \text{unter Voraussetzung 2. und } \sigma \text{ bekannt} \\ \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} & \text{unter Voraussetzung 2. und } \sigma \text{ unbekannt} \\ \dfrac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} & \text{unter Voraussetzung 2. und } G \sim B(1, p) \end{cases}$$

Schritt 3: Der Verwerfungsbereich

80

$B = (-\infty, -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}, \infty)$ im Fall Lücke 75 a)

$B = (-\infty, -x_{1-\alpha})$ im Fall Lücke 75 b)

$B = (x_{1-\alpha}, \infty)$ im Fall Lücke 75 c)

wird festgelegt, wobei die Fraktilswerte $x_{1-\alpha/2}$ oder $x_{1-\alpha}$

– der 81 $t(n-1)$ -Verteilung unter Voraussetzung 1. bei 82 $n - 1 \leq 30$,

– der 83 $N(0, 1)$ -Verteilung unter Voraussetzung 2. oder unter Voraussetzung 1. bei 84 $n - 1 > 30$

zu entnehmen sind.

Schritt 4: H_0 wird genau dann verworfen, wenn 85 $v \in B$ gilt.

- Beispiel: $X_1, \dots, X_{2000} \sim B(1,p)$ mit

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\text{-te Person Wähler der Partei ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{2000} x_i = 108$$

Prüfe $H_0 : p \leq 0.05$, $H_1 :$ 86 $p > 0.05$ zum Signifikanzniveau 2 %

Fall: 87 Approximativer Gaußtest, Lücke 75 c)

Voraussetzung 88 2. erfüllt: $5 \leq 108 \leq 2000 - 5$

1. 89 $\alpha = 0.02$

2. 90 $v = \dfrac{\frac{108}{2000} - 0.05}{0.05 \cdot (1 - 0.05)} \sqrt{2000} = 0.82$

3. 91 $N(0,1)$: $x_{1-\alpha} = x_{0.98} = 2.05 \Rightarrow B = (2.05, \infty)$

4. 92 $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

6 Übungsaufgaben

[Pap11, Teil III, Zu Abschnitt 4, Aufgaben 1-5, Seite 644f]

Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.