

6 Übungen zur Intervallschätzung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 12. April 2016, 08:25



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Reviewfragen

- Wozu dient die Intervallschätzung?
- Wie hängen Irrtumswahrscheinlichkeit α und das Konfidenzniveau zusammen?
- Warum wird das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Fraktile und *nicht* das $(1 - \alpha)$ -Fraktile bestimmt, wenn das Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung geschätzt werden soll?
- Was bedeutet hier *dichotom*?
- Was ist die Voraussetzung, wenn das Konfidenzintervall für μ bei beliebiger / dichotomer Verteilung geschätzt werden soll?
- Falls die Verteilung beliebig, nicht dichotom und die Standardabweichung σ unbekannt ist, in welchen Fällen kann eine andere Schätzfunktion als die Stichproben-Standardabweichung S für $\hat{\sigma}$ sinnvoll sein?

Aufgabe 2:

Eine Stichprobe (x_1, \dots, x_{30}) vom Umfang $n = 30$ aus einer normalverteilten Grundgesamtheit ergibt

$$\bar{x} = 1\,500 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 20\,000$$

- In welchem Intervall liegt „mit 95 %-iger Sicherheit“ der Erwartungswert μ ?
- Zu welchem Konfidenzniveau entsteht ein Schätzintervall für μ der Form $[1\,460 \quad 1\,540]$?
- Bestimmen Sie das Schätzintervall für die Varianz zum Konfidenzniveau 0.95

Hinweis: Nutzen Sie die Tabellen der entsprechenden Verteilungen im Skript und interpolieren Sie gegebenenfalls.

Aufgabe 3:

Bei 120 Würfeln mit einem Würfel erschienen die Zahlen 1 bis 6 mit folgenden Häufigkeiten:

| Zahl a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|----|----|----|----|----|----|
| $h(a)$ | 21 | 27 | 20 | 24 | 15 | 13 |

Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ ein Schätzintervall für den Erwartungswert der Augenzahl.

Aufgabe 4:

Die Füllmenge von Limonadeflaschen wurde geprüft und es ergaben sich folgende Werte:

| ccm | 197 | 198 | 199 | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 | 205 | 206 | 207 |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Anzahl | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Nach Angaben des Abfüllers ist die Füllmenge normalverteilt mit einer Varianz von $\sigma^2 = 2.25$. Geben Sie ein Schätzintervall für den Erwartungswert μ zum Niveau $1 - \alpha = 0.94$ an und bestimmen Sie die Intervalllänge. Welcher Stichprobenumfang garantiert eine Länge von 1 für das Schätzintervall?

Aufgabe 5:

X_1, \dots, X_{31} beschreibe eine einfache Stichprobe aus einer beliebig verteilten Grundgesamtheit. Aus den Ergebnissen wurden $\bar{x} = 9$ und $s^2 = \frac{31}{4}$ errechnet. Bestimmen Sie zur Irrtumswahrscheinlichkeit 0.05

- ein Schätzintervall für den Erwartungswert
- ein Schätzintervall für die Varianz σ^2 , unter der Annahme, dass die X_i normalverteilt sind,

Aufgabe 6:

In einer Fabrik wird der tägliche Stromverbrauch X bei konstanter Auslastung von Maschinen untersucht. Bei 200 gleichartigen Maschinen ergab sich die Stichprobenrealisation x_1, \dots, x_{200} , von der bekannt ist:

$$\sum_{i=1}^{200} x_i = 2400 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{200} x_i^2 = 30929$$

- Bestimmen Sie das Schätzintervall für den Verbrauch μ mit einem Konfidenzniveau von 95 %.
- Es sei gesichert, dass für die Standardabweichung σ von X sowie alle denkbaren Realisationen der Stichproben-Standardabweichung höchstens 4 betragen. Ab welchem Stichprobenumfang n ist gesichert, dass die Länge des Schätzintervalls zum Konfidenzniveau 99 % höchstens 0.9 beträgt?

Aufgabe 7:

Bislang musste an Postschaltern im Mittel 3 Minuten gewartet werden. Eine für alle Postfilialen erwogene Software-Unterstützung wird vor der generellen Installation per Stichprobe untersucht. Bei 200 Kunden ergaben sich die Dauern x_1, \dots, x_{200} mit $\bar{x} = 2.5$ und $s = 2.15$.

- Bestimmen Sie zu einem Konfidenzniveau von 95 % ein Schätzintervall für die erwartete Dauer nach Installation.
- Wie groß muss das Konfidenzniveau gewählt werden, damit die obere Grenze des Schätzintervalls gerade 3 beträgt?

Aufgabe 8:

Aus der Grundgesamtheit der Studenten wurden 100 zufällig (mit Zurücklegen) ausgewählt und befragt, ob sie rauchen. Dabei antworteten 36 mit *ja* und 64 mit *nein*.

- Bestimmen sie das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95 % für den Anteil der Raucher in der vorliegenden Grundgesamtheit.
- Welcher Stichprobenumfang würde bei gleichem Konfidenzniveau von 95 % gewährleisten, dass die Länge des Konfidenzintervalls 0.14 ist?

Aufgabe 9:

Ein Anbieter von Online-Computerspielen hat bei 100 zufällig ausgewählten Nutzern eine Woche lang protokolliert, wie lange sie spielten. Aus den in Minuten gemessenen Spieldauern x_1, \dots, x_{100} , die als Realisierungen normalverteilter Stichprobenvariablen angesehen werden können, wurden die Werte

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 21840 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 4868856$$

errechnet.

- Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95 % für die Varianz der gemessenen Spieldauer.
- Was ergibt sich bei einer Punktschätzung mit einer *erwartungstreuen* Schätzfunktion für die Varianz?

Aufgabe 10:

Gegeben ist eine einfache Stichprobe vom Umfang 40 aus einer Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz. Aus dieser Stichprobe wurde für den Erwartungswert der Grundgesamtheit mit $\alpha = 0.05$ das symmetrische Konfidenzintervall $[297.03 \quad 352.97]$ ermittelt.

- Unterstellen Sie, dass die Grundgesamtheit Poisson-verteilt ist. Bestimmen Sie dann einen geeigneten Schätzwert des Verteilungsparameters der Poisson-Verteilung.

Nehmen Sie im Folgenden an, obiges Schätzintervall sei mit Daten aus einer normalverteilten Grundgesamtheit errechnet worden.

2. Geben Sie den *Maximum-Likelihood-Schätzwert* für die Standardabweichung an.
3. Bestimmen Sie zur Irrtumswahrscheinlichkeit 10 % ein Schätzintervall für die Varianz.

Aufgabe 11:

Eine Alkoholkontrolle bei Autofahrern lieferte 34 fahruntaugliche Fahrer mit folgenden Werten:

| | | | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Blutalkohol ‰ | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.1 | 1.3 |
| Anzahl | 11 | 9 | 6 | 4 | 2 | 2 |

Bestimmen Sie für ein Konfidenzniveau von 95 % das symmetrische Schätzintervall für den Erwartungswert des Blutalkoholgehalts eines fahruntauglichen Autofahrers.

Aufgabe 12:

Hans, Hobby-Statistiker, hat auf Basis der selben einfachen Stichprobe aus einer $B(1, p)$ -verteilten Grundgesamtheit die folgenden beiden Schätzintervalle für den unbekanntem Verteilungsparameter p bestimmt:

$$I_1 = [0.1342 \quad 0.2658] \quad \text{und} \quad I_2 = [0.1216 \quad 0.2784]$$

Das Intervall I_2 hat Hans zum Konfidenzniveau 95 % berechnet.

- (a) Zeigen Sie, dass I_1 und I_2 eine Stichprobe vom Umfang 100 zu Grunde liegt.
- (b) Mit welchem Konfidenzniveau hat Hans das Schätzintervall I_1 bestimmt?
- (c) Wie groß hätte Hans den Stichprobenumfang wählen müssen, so dass die Länge des 95 %-Konfidenzintervalls maximal die Länge von I_1 erreicht?
- (d) Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzwert des Erwartungswerts der Grundgesamtheit?