⑥ Intervallschätzung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 12. April 2016, 8:31

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

- Schätze ein Intervall für ϑ auf Basis einer Stichprobe.
- Verwendung der Stichprobenfunktionen Θ_u, Θ_o, so dass

1

⇒ *Konfidenzintervall* für [2] zum *Konfidenzniveau* [3]

- Beachte:
  Das *Schätzintervall* [4] ist die Realisierung der Zufallsvariablen (!) [5] .

⇒ Irrtumswahrscheinlichkeit α [6]

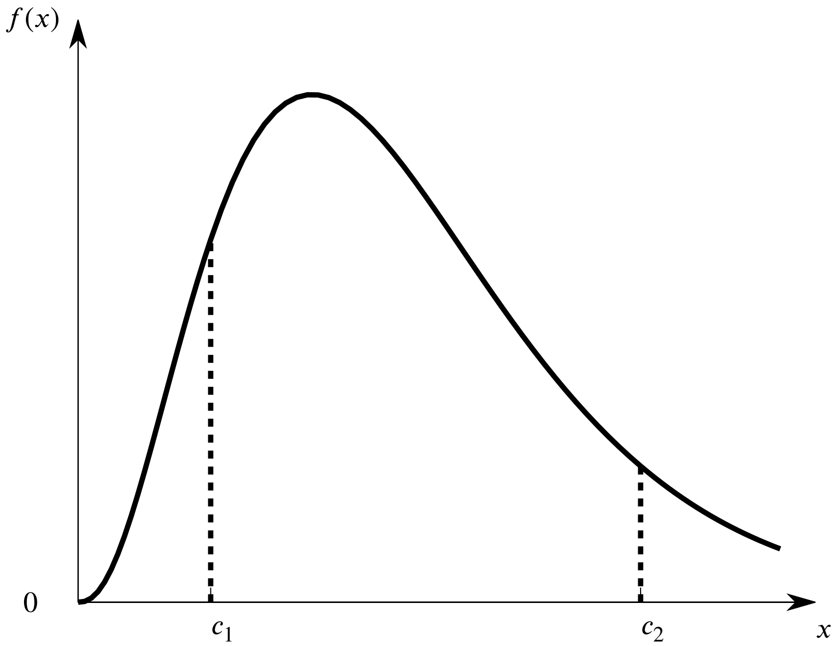
- Welche Konfidenzintervalle sind zur Schätzung geeignet?

⇒ Hängt von Verteilung von G und vom unbekannten Parameter [7] ab.

- Im Folgenden:
  Einfache Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ mit $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

Symmetrische Konfidenzintervalle

Symmetrisch heißt: übereinstimmende *Wahrscheinlichkeiten* für Über- und Unterschreiten des Konfidenzintervalls, formal:
[8]



Wichtig: Eine Verkleinerung von α bewirkt eine [9] des Konfidenzintervalls.

2 Intervallschätzung für den unbekannten Parameter μ

2.1 Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit σ^2 bekannt [Pap11, Kapitel 3.4.2]

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau 10 fest.

Schritt 2: Bestimme das 11 -Fraktil c der 12 -Verteilung.

Schritt 3: Berechne das Stichprobenmittel 13 .

Schritt 4: Berechne den Wert 14 .

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall 15

- Grund für $N(0,1)$-Verteilung: Betrachte zum Beispiel $\Theta_{\mathrm{u}} = \bar{X} - \frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$:

16

- Beispiel: Normalverteilung mit $\sigma = 2.4$,
  $(x_1, \ldots, x_9) = (184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4)$
  Gesucht: Intervall für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.99$

  17

  1.

  18

  2.

  19

  3.

20

4.

21

5.

- Wichtige $N(0,1)$-Fraktilswerte: siehe [Pap11, Tabelle 2, Seite 742]
- Intervalllänge
  - Im Fall 2.1 gilt offenkundig

    22

  - Welches n sichert eine vorgegebene (Maximal-)Länge L? Lücke 22 nach n auflösen! $\Rightarrow$ 23
  - Obiges Beispiel: $L = 4 \Rightarrow$

    24

  - Eine Halbierung von L erfordert eine Vervierfachung von n!

2.2 Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit σ^2 unbekannt [Pap11, Kapitel 3.4.3]

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau 25 fest.

Schritt 2: Bestimme das 26 -Fraktil c der 27 -Verteilung.

Schritt 3: Berechne das Stichprobenmittel 28 und die Stichproben-Standardabweichung 29 .

Schritt 4: Berechne den Wert 30 .

31

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall

- Zu Schritt 2:

  32 33

  Falls ⇒ -Verteilung kann verwendet werden.

- Beispiel von oben:

  34

  1.

  35

  2.

  36

  3.

  37

  4.

  38

  5.

2.3 Konfidenzintervall für μ bei beliebiger/dichotomer Verteilung [Pap11, Kapitel 3.4.6]

- Voraussetzung:

  39

- Vorgehensweise:

40

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau fest.

41 42

Schritt 2: Bestimme das -Fraktil c der -Verteilung.

Schritt 3: Berechne das Stichprobenmittel 43 und einen Schätzwert $\hat{\sigma}$ für σ; setze

44

Schritt 4: Berechne den Wert 45 .

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall 46

- Zu Schritt 3:

  Bei manchen bekannten Verteilungen kann ein anderer Schätzer 47 sinnvoller sein. Zum

  Beispiel: Poisson-Verteilung mit 48 unbekannt.

  $(x_1, x_2, \dots, x_{40}) = (3, 8, \dots, 6)$ mit $\bar{x} = 6.5$

  Gesucht: Intervall für 49 zum Konfidenzniveau 50

  1. 51
  2. 52
  3. 53
  4. 54

55

5.

- Intervalllänge
  - Falls 56 bekannt $\Rightarrow$ Lücke 23 verwenden
  - Sonst hängt $L = \dfrac{2\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}$ wegen 57 vom Stichprobenergebnis ab
    $\Rightarrow$ n kann im Allgemeinen *nicht* ermittelt werden.
  - Ausnahme: Obere Schranke d für $\hat{\sigma}$ ist bekannt.
  - Dann

58

  - Beispiel: $G \sim B(1, p) \Rightarrow \bar{x} =$ 59

60

3 Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung [Pap11, Kapitel 3.4.4]

Als *Schätzfunktion* für σ^2 verwenden wir S^2 und bilden mit ihr die Stichprobenfunktion / Zufallsvariable

61

die einer 62 -Verteilung genügt, siehe Skript 4, Kapitel 5. Damit ergibt sich folgende Vorgehensweise:

- Falls μ unbekannt:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau 63 fest.

Schritt 2: Bestimme 64

der 65 -Verteilung.

Schritt 3: Berechne

66

aus dem Stichprobenergebnis.

Schritt 4: Berechne die Werte

67

.

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall 68 an.

- Falls μ bekannt:

Schritt 2: Ersetze 69

Schritte 3 und 4: Ersetze 70

- Beispiel: $G \sim N(2, \sigma)$, $(x_1, \dots, x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$
  Gesucht: Intervall für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.99$

71

1.

72

2.

73

3.

74

4.

75

5.

4 Uebungsaufgaben

Aufgabenblatt und [Pap11, Seite 642f: Zu Abschnitt 3 Aufgaben 4) bis 9)]

Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.