6 Intervallschätzung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 12. April 2016, 8:31

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

- Schätze ein Intervall für ϑ auf Basis einer Stichprobe.
- Verwendung der Stichprobenfunktionen Θ_{u}, Θ_{o}, so dass

1

$$P(\Theta_{\mathrm{u}} \leq \vartheta \leq \Theta_{\mathrm{o}}) = 1 - \alpha$$

⇒ *Konfidenzintervall* für [2] ϑ zum *Konfidenzniveau* [3] $1-\alpha$

- Beachte:
  Das *Schätzintervall* [4] $[\vartheta_{\mathrm{u}}, \vartheta_{\mathrm{o}}]$ ist die Realisierung der Zufallsvariablen (!) [5] $[\Theta_{\mathrm{u}}, \Theta_{\mathrm{o}}]$.

⇒ Irrtumswahrscheinlichkeit α [6] (klein, i.d.R. $\alpha \leq 0.1$)

- Welche Konfidenzintervalle sind zur Schätzung geeignet?

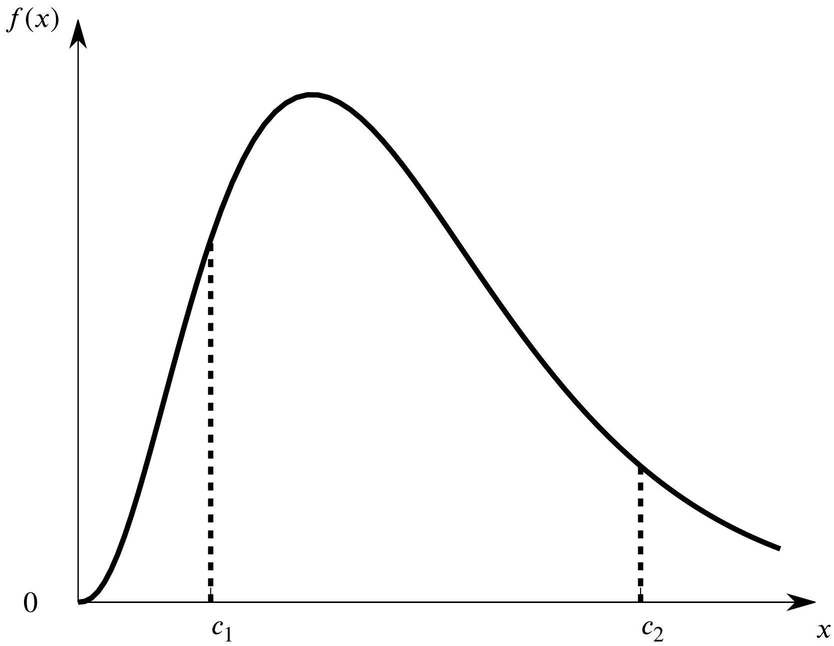
⇒ Hängt von Verteilung von G und vom unbekannten Parameter [7] (μ, σ^2) ab.

- Im Folgenden:
  Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

Symmetrische Konfidenzintervalle

Symmetrisch heißt: übereinstimmende *Wahrscheinlichkeiten* für Über- und Unterschreiten des Konfidenzintervalls, formal:

[8] $P(\Theta_{\mathrm{u}} > \vartheta) = P(\Theta_{\mathrm{o}} < \vartheta) = \frac{\alpha}{2}$ Im Bild eintragen: $c_1 = x_{\alpha/2}$, $c_2 = x_{1-\alpha/2}$, $1-\alpha$



Wichtig: Eine Verkleinerung von α bewirkt eine [9] Vergrößerung des Konfidenzintervalls.

2 Intervallschätzung für den unbekannten Parameter μ

2.1 Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit σ^2 bekannt [Pap11, Kapitel 3.4.2]

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau 10 $1-\alpha$ fest.

Schritt 2: Bestimme das 11 $1-\frac{\alpha}{2}$ -Fraktil c der 12 $N(0,1)$ -Verteilung.

Schritt 3: Berechne das Stichprobenmittel 13 $\bar{x}$.

Schritt 4: Berechne den Wert 14 $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$.

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall 15 $[\bar{x}-\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}]$

- Grund für $N(0,1)$-Verteilung: Betrachte zum Beispiel $\Theta_{\mathrm{u}} = \bar{X} - \frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$:

16

$$\Theta_{\mathrm{u}} < \mu \Leftrightarrow \bar{X} - \frac{\sigma c}{\sqrt{n}} < \mu \Leftrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} < c$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

- Beispiel: Normalverteilung mit $\sigma = 2.4$,
  $(x_1, \dots, x_9) = (184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4)$
  Gesucht: Intervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.99$

1. 17 $1-\alpha = 0.99$
2. 18 $N(0,1)$: $c = x_{1-\alpha/2} = x_{0.995} = 2.576$
3. 19 $\bar{x} = \frac{1}{9}(184.2 + \cdots + 184.4) = 184.8$

4. [20] $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}} = \frac{2.4 \cdot 2.576}{\sqrt{9}} = 2.06$

5. [21] $[184.8 - 2.06, 184.8 + 2.06] = [182.74, 186.86]$

- Wichtige $N(0,1)$-Fraktilswerte: siehe [Pap11, Tabelle 2, Seite 742]
- Intervalllänge
  - Im Fall 2.1 gilt offenkundig

    [22] $L = \Theta_o - \Theta_u = \frac{2\sigma c}{\sqrt{n}}$

  - Welches n sichert eine vorgegebene (Maximal-)Länge L? Lücke 22 nach n auflösen! $\Rightarrow$ [23] $n \geq (\frac{2\sigma c}{L})^2$
  - Obiges Beispiel: $L = 4 \Rightarrow$

    [24] $n \geq (\frac{2 \cdot 2.4 \cdot 2.576}{4})^2 = 9.556 \Rightarrow n \geq 10$

  - Eine Halbierung von L erfordert eine Vervierfachung von n!

2.2 Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit σ^2 unbekannt [Pap11, Kapitel 3.4.3]

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau [25] $1 - \alpha$ fest.

Schritt 2: Bestimme das [26] $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Fraktil c der [27] $t(n-1)$ -Verteilung.

Schritt 3: Berechne das Stichprobenmittel [28] $\bar{x}$ und die Stichproben-Standardabweichung [29] s .

Schritt 4: Berechne den Wert [30] $\frac{sc}{\sqrt{n}}$.

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall 31 $[\bar{x} - \frac{sc}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{sc}{\sqrt{n}}]$

- Zu Schritt 2:

  Falls 32 $n - 1 > 30$ $\Rightarrow$ 33 $N(0, 1)$ -Verteilung kann verwendet werden.

- Beispiel von oben:

  1. 34 $1 - \alpha = 0.99$

  2. 35 $t(8)$: $c = x_{1-\alpha/2} = x_{0.995} = 3.355$

  3. 36

  $$\bar{x} = \frac{1}{9}(184.2 + \cdots + 184.4) = 184.8$$

  $$s = \sqrt{\frac{1}{8}\left((184.2^2 + \cdots + 184.4^2\right) - 9 \cdot 184.8^2)} = 1.72$$

  4. 37 $\frac{sc}{\sqrt{n}} = \frac{1.72 \cdot 3.355}{\sqrt{9}} = 1.92$

  5. 38 $[184.8 - 1.92, 184.8 + 1.92] = [182.88, 186.72]$

2.3 Konfidenzintervall für μ bei beliebiger/dichotomer Verteilung [Pap11, Kapitel 3.4.6]

- Voraussetzung:

39 $n > 30$ oder $5 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n - 5$ falls G dichotom (Grenzwertsatz)

- Vorgehensweise:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau 40 $1 - \alpha$ fest.

Schritt 2: Bestimme das 41 $1 - \frac{\alpha}{2}$ -Fraktil c der 42 $N(0, 1)$ -Verteilung.

Schritt 3: Berechne das Stichprobenmittel 43 $\bar{x}$ und einen Schätzwert $\hat{\sigma}$ für σ; setze

44
$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma & \text{falls } \sigma \text{ bekannt ist} \\ \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})} & \text{falls } G \text{ dichotom ist} \\ s & \text{sonst} \end{cases}$$

Schritt 4: Berechne den Wert 45 $\frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}}$.

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall 46 $[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}}]$

- Zu Schritt 3:

  Bei manchen bekannten Verteilungen kann ein anderer Schätzer 47 $\hat{\sigma}$ sinnvoller sein. Zum

  Beispiel: Poisson-Verteilung mit 48 $\lambda = \mu = \sigma^2$ unbekannt.

  $$(x_1, x_2, \dots, x_{40}) = (3, 8, \dots, 6) \quad \text{mit } \bar{x} = 6.5$$

  Gesucht: Intervall für 49 λ zum Konfidenzniveau 50 $1 - \alpha = 0.9$

  1. 51 $1 - \alpha = 0.9$

  2. 52 $N(0,1)$: $c = x_{1-\alpha/2} = x_{0.95} = 1.645$

  3. 53
  $$\bar{x} = 6.5$$
  $$\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{x}} = \sqrt{6.5} = 2.55$$

  4. 54 $\frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}} = \frac{2.55 \cdot 1.645}{\sqrt{40}} = 0.66$

55 $[6.5 - 0.66, 6.5 + 0.66] = [5.84, 7.17]$

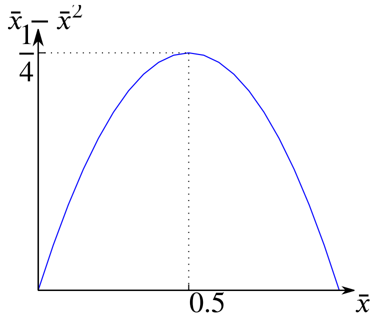
5.

- Intervalllänge
  - Falls 56 σ bekannt $\Rightarrow$ Lücke 23 verwenden
  - Sonst hängt $L = \dfrac{2\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}$ wegen 57 $\hat{\sigma}$ vom Stichprobenergebnis ab
    $\Rightarrow$ n kann im Allgemeinen *nicht* ermittelt werden.
  - Ausnahme: Obere Schranke d für $\hat{\sigma}$ ist bekannt.
  - Dann

58
$$L \leq \frac{2dc}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{2dc}{L}\right)^2$$

  - Beispiel: $G \sim B(1, p) \Rightarrow \bar{x} =$ 59 $[0, 1]$

60
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})} = \sqrt{\bar{x} - \bar{x}^2}$$
$$\bar{x} - \bar{x}^2 \text{ maximal bei } \bar{x} = \frac{1}{2}$$
$$\bar{x} - \bar{x}^2 \leq \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\hat{\sigma} \leq \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = d$$
$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{2dc}{L}\right)^2 = \left(\frac{c}{L}\right)^2$$



3 Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung [Pap11, Kapitel 3.4.4]

Als *Schätzfunktion* für σ^2 verwenden wir S^2 und bilden mit ihr die Stichprobenfunktion / Zufallsvariable

61 $$Z = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$$

die einer 62 $\chi^2(n-1)$ -Verteilung genügt, siehe Skript 4, Kapitel 5. Damit ergibt sich folgende Vorgehensweise:

- Falls μ unbekannt:

Schritt 1: Lege ein Konfidenzniveau 63 $1-\alpha$ fest.

Schritt 2: Bestimme 64 $\frac{\alpha}{2}$- und $1-\frac{\alpha}{2}$ -Fraktil $c_1 = x_{\alpha/2}$ und $c_2 = x_{1-\alpha/2}$

der 65 $\chi^2(n-1)$ -Verteilung.

Schritt 3: Berechne

66 $$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

aus dem Stichprobenergebnis.

Schritt 4: Berechne die Werte

67 $$\vartheta_{\mathrm{u}} = \frac{(n-1)s^2}{c_2} \text{ und } \vartheta_{\mathrm{o}} = \frac{(n-1)s^2}{c_1}$$.

Schritt 5: Gebe als Schätzergebnis das Intervall 68 $[\vartheta_{\mathrm{u}}, \vartheta_{\mathrm{o}}]$ an.

- Falls μ bekannt:

Schritt 2: Ersetze 69 $\chi^2(n-1)$ durch $\chi^2(n)$

Schritte 3 und 4: Ersetze 70 $(n-1)s^2$ durch $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$

- Beispiel: $G \sim N(2, \sigma)$, $(x_1, \ldots, x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$
  Gesucht: Intervall für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.99$

71
1. $1 - \alpha = 0.99$

72
2. $$\chi^2(5): \quad c_1 = x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0.005} = 0.41$$
$$c_2 = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0.995} = 16.75$$

73
3. $$\sum_{i=1}^{5}(x_i - \mu)^2 = (1-2)^2 + \cdots + (2-2)^2 = 2.5$$

74
4. $\vartheta_{\mathrm{u}} = \dfrac{2.5}{16.75} = 0.15, \ \vartheta_{\mathrm{o}} = \dfrac{2.5}{0.41} = 6.10$

75
5. $[0.15, 6.10]$, (groß, weil n klein)

4 Uebungsaufgaben

Aufgabenblatt und [Pap11, Seite 642f: Zu Abschnitt 3 Aufgaben 4) bis 9)]

Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.