

5 Aufgaben zur Punktschätzung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 5. April 2016, 09:30



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Reviewfragen

- Wozu dient die Punktschätzung?
- Was bedeutet *erwartungstreu* und *asymptotisch erwartungstreu*?
- Wozu dient die Bestimmung der *Wirksamkeit* einer Schätzfunktion?
- Was bedeutet hier der Begriff *Konsistenz*?
- Was ist der Unterschied zwischen einem Maximum-Likelihood-Schätzwert und einer Maximum-Likelihood-Schätzfunktion?
- $\hat{\Theta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sei eine Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für den Parameter ϑ . Unter welcher Voraussetzung ist $\sin \hat{\Theta}$ eine Maximum-Likelihood-Schätzfunktion von $\sin \vartheta$?

Aufgabe 2:

Der Erwartungswert μ in der Grundgesamtheit soll durch folgende Stichprobenfunktionen geschätzt werden:

$$\hat{\Theta}_n = \frac{1}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_n), \quad \hat{\Theta}'_n = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n iX_i, \quad \hat{\Theta}''_n = \frac{2}{n(n+1)} \cdot (X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n)$$

Prüfen Sie die Erwartungstreue der Schätzfunktionen und ermitteln Sie die wirksamste unter den erwartungstreuen Schätzfunktionen. Sind die Schätzfunktionen konsistent?

Hinweis:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Aufgabe 3:

Es sei x_1, \dots, x_n das Ergebnis einer einfachen Stichprobe aus einer Poisson-verteilten Grundgesamtheit mit dem unbekanntem Parameter μ .

- Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion für dieses Stichprobenergebnis
- Zeigen Sie, dass \bar{X} die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für den unbekanntem Parameter μ ist.
- Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für die Standardabweichung $\sqrt{\mu}$.

Aufgabe 4:

In einem gut gefüllten Saal befinden sich N Personen, die mit 1 bis N durchnummeriert sind. Herr Maier von der Gewerbeaufsicht kennt N nicht und wird vom Veranstalter mit allerlei Tricks am Betreten des Saals gehindert. Herr Maier, der N ermitteln möchte, ist lediglich in der Lage, die Nummer eines Teilnehmers, der zufällig den Saal verlässt, zu erkennen. Fassen Sie diese Nummer als Realisation x einer Zufallsvariablen X auf.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X (in Abhängigkeit von N).
- Ist $2X - 1$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für N ?

Aufgabe 5:

X_1, \dots, X_n und Y_1, \dots, Y_n seien einfache Stichproben, wobei die Verteilung der X_i, Y_i vom unbekanntem Parameter $p \in [0, \frac{1}{2}]$ abhängt. Für alle $i = 1, \dots, n$ gelte:

$$E(X_i) = E(X_i^2) = p$$

$$E(Y_i) = 1.5p$$

$$\text{Var}(Y_i) = 1.5p(1 - 1.5p)$$

$$E(X_i \cdot Y_i) = p^2$$

- Berechnen Sie in Abhängigkeit von p die Größen

$$\text{Var}(X_i), \quad \text{Cov}(X_i, Y_i), \quad E(X_i + Y_i) \quad \text{und} \quad \text{Var}(X_i + Y_i)$$

- Bestimmen Sie unter den drei Schätzfunktionen

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{2}{5n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)$$

die für p erwartungstreu, und bestimmen Sie unter den erwartungstreuen die wirksamste.

Aufgabe 6:

Zwei unterschiedliche Messgeräte A und B messen laufend den Salzgehalt in einem Meerwasseraquarium. Beide Messgeräte liefern „im Mittel richtige“ Werte, was sich durch

$$E(X) = E(Y) = E(S) = \mu$$

beschreiben lässt, wobei X (bzw. Y) das vom Messgerät A (bzw. B) verwendete Messverfahren zur Messung des Salzgehalts S ist. Es ist bekannt, dass A ungenauere Messungen als B liefert, was sich durch

$$\text{Var}(X) = 1.5 \cdot \text{Var}(Y)$$

beschreiben lässt. Ferner sind X und Y unkorreliert. Beide Messgeräte liefern ihre Messergebnisse an einen Zentralrechner, der aus X und Y mittels den Gewichten a und b die Schätzfunktion

$$Z = a \cdot X + b \cdot Y$$

bildet.

- Wie müssen a und b gewählt werden, damit Z erwartungstreu für μ ist?
- Welche unter den erwartungstreuen Schätzfunktionen Z ist die wirksamste?

Aufgabe 7:

Gegeben sei eine einfache Stichprobe X_1, \dots, X_n aus einer Grundgesamtheit mit unbekanntem Erwartungswert μ , der mit folgender Stichprobenfunktion geschätzt werden soll

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \alpha \cdot X_n \quad \text{mit } \alpha \in [-1; 1].$$

- Bestimmen Sie α so, dass $\hat{\theta}$ erwartungstreu für μ ist. Ist die resultierende Schätzfunktion konsistent?
- Begründen Sie, ob das die wirksamste Schätzfunktion für μ ist.
- Angenommen, die Grundgesamtheit ist $N(\mu, 9)$ verteilt. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der von $\hat{\theta}$ gelieferte Schätzwert $\hat{\theta}$ bei einem Stichprobenumfang von $n = 82$ im Intervall $\mu - 1; \mu + 1$ liegen wird?

Aufgabe 8:

Eine einfache Stichprobe bezüglich eines Merkmals X in einer Grundgesamtheit ergab folgende Ergebnisse:

x	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	4	4	3	2	1

Nehmen Sie zunächst an, X sei exponentialverteilt.

- (a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für λ .
- (b) Wie groß ist unter Verwendung des Ergebnisses aus (a) die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert annimmt, der nicht kleiner als 2 ist?
- (c) Lösen Sie die Teile (a) und (b) nun unter der Annahme, dass X Poisson-verteilt ist.
- (d) Bei dem Merkmal X handelt es sich um die Anzahl der zwischen 23:00 und 24:00 Uhr an einer Tankstelle tankenden Kraftfahrzeuge. Begründen Sie kurz, welche der beiden obigen Verteilungsannahmen sinnvoller ist.

Aufgabe 9:

Die Zeitdauer T für einen bestimmten Vorgang sei gemäß der Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - e^{-b\sqrt{t}} \text{ für } t > 0$$

verteilt (mit $F(t) = 0$ für $t \leq 0$).

- (a) Bestimmen Sie den Median t_{Med} in Abhängigkeit vom Parameter b .
- (b) Bei einer einfachen Stichprobe zum Merkmal T vom Umfang $n = 10$ wurden die Zeitdauern

$$(1, 4, 9, 9, 4, 4, 4, 1, 1, 4)$$

registriert. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert \hat{b} für b . (Die zweite Ableitung muss nicht ausgewertet werden.)

- (c) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert \hat{t}_{Med} für den Median aus der in (b) angegebenen Stichprobenrealisation.

Aufgabe 10:

Freikletterer Hans interessiert, wie groß die Entfernung Z von seiner frei werdenden Hand zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt während des Kletterns zum nächsten „Henkel“ (großer guter Griff für alle Finger) ist. Er geht davon aus, dass Z gleichverteilt über dem Intervall $[0, d]$ ist.

- (a) Stellen Sie die Likelihood-Funktion $f(z_1, z_2, \dots, z_n | d)$ für eine Stichprobenrealisation (z_1, z_2, \dots, z_n) auf.
- (b) Für $n = 5$ Entfernungsmessungen (in Armlängen) hat er sich die Stichprobenrealisation

$$(z_1, \dots, z_5) = (6, 18, 11, 20, 9)$$

gemerkt. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert \hat{d} für d .