

# 4 Grundlagen der induktiven Statistik\*

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 31. März 2015, 09:29

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Bedeutungen des Begriffs „Statistik“ . . . . .	2
1.2	Induktive Statistik . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Grundbegriffe</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Wichtige Stichprobenfunktionen</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Prüf- und Testverteilungen</b>	<b>7</b>
4.1	Chi-Quadrat-Verteilung . . . . .	7
4.2	$t$ -Verteilung . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Verteilungen wichtiger Stichprobenfunktionen</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>9</b>

---

\*[Pap11, Teil III, Kapitel 3.2]

## 1 Einleitung

### 1.1 Bedeutungen des Begriffs „Statistik“

1

---

**Beispiel:** 12 Beschäftigte werden nach der Entfernung zum Arbeitsplatz (in km) befragt.  
Antworten: 4, 11, 1, 3, 5, 4, 20, 4, 6, 16, 10, 6

2

---

- deskriptiv:

3

---

- induktiv:

### 1.2 Induktive Statistik

- Vollerhebung oft unmöglich, deshalb:

4

---

- Beispiel:
  - Warensendung 1000 Stück
  - darunter  $M$  Stück Ausschuss
  - $M$  ist unbekannt

Stichprobe:

5 \_\_\_\_\_  
|

Denkbare Zielsetzungen:

6 \_\_\_\_\_  
|

**2 Grundbegriffe**

**Merkmalsträger:** 7 \_\_\_\_\_  
|

**Merkmal:** 8 \_\_\_\_\_  
|

**Ausprägung:** 9 \_\_\_\_\_  
|

**Grundgesamtheit  $G$ :**  
10 \_\_\_\_\_  
|

**Verteilung der Grundgesamtheit:**  
11 \_\_\_\_\_  
|

**Stichprobenumfang  $n$ :**  
12 \_\_\_\_\_  
|

**Uneingeschränkte Zufallsauswahl:**

13

---

**Einfache Stichprobe:**

14

 Uneingeschränkte Zufallsauswahl und
 

---

 $\Rightarrow$  Alle Stichprobenvariablen  $X_1, \dots, X_n$  sind
 

---

15

---

**Stichprobenergebnis:**

16

---

**Stichprobenraum:**

17

---

**Likelihoodfunktion:**

18

---

**Beispiel:**

19

$$\bullet G \sim B(1, p) \Rightarrow f_i(x_i) =$$


---

- $p$  ist unbekannt
- Einfache Stichprobe mit  $n = 2$

⇒ Likelihoodfunktion:

<sup>20</sup> \_\_\_\_\_  
 |

- Stichprobenergebnis  $(0, 1) \Rightarrow$  <sup>21</sup> \_\_\_\_\_  
 |
- Welcher Wert  $p$  passt „am besten“ zu  $(0, 1)$ ?

**Stichprobenfunktion:**

<sup>22</sup> \_\_\_\_\_  
 |

**3 Wichtige Stichprobenfunktionen**

• Gegeben:

– Einfache Stichprobe <sup>23</sup> \_\_\_\_\_  
 |

– Beliebige Verteilung mit <sup>24</sup> \_\_\_\_\_  
 |

• Besonders wichtige Zusammenhänge:

– Der Erwartungswert der mittleren quadratischen Abweichung bezüglich  $\mu$  ist die Varianz  $\sigma^2$  der Stichprobe wegen:

<sup>25</sup> \_\_\_\_\_  
 |

– Die Varianz lässt sich schätzen, indem der (theoretische und im allgemeinen unbekannt) Erwartungswert  $\mu$  mit Hilfe des Stichprobenmittels  $\bar{X}$  geschätzt wird. Wegen

<sup>26</sup> \_\_\_\_\_  
 |

muss für eine erwartungstreue<sup>1</sup> Schätzung der Stichprobenvarianz  $S^2$  der Korrekturfaktor  $\frac{n}{n-1}$  berücksichtigt werden:

27 

---

– Verschiebungssatz für  $S^2$ :

28 

---

– Wegen der Jensenschen Ungleichung gilt

29 

---

---

<sup>1</sup>Definition folgt später.

Stichprobenfunktion	Bezeichnung	Erwartungswert	Varianz
$\sum_{i=1}^n X_i$	Merkmalssumme	30	
$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$	Stichprobenmittel		
$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$	Gauß-Statistik		
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	mittlere quadratische Abweichung bezgl. $\mu$		
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	mittlere quadratische Abweichung		
$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	Stichprobenvarianz		
$S = \sqrt{S^2}$	Stichproben-Standardabweichung		
$\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}$	t-Statistik		

#### 4 Prüf- und Testverteilungen [Pap11, Teil II, Kapitel 8]

##### 4.1 Chi-Quadrat-Verteilung

- Sind  $X_1, \dots, X_n \sim N(0, 1)$  i.i.d, so wird die Verteilung von

31

als *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $n$  Freiheitsgraden bezeichnet.

- Kurzschreibweise: 32

- Es gilt: 33

- Fraktile (Quantile):
  - Tabelle 1, siehe auch [Pap11, Tabelle 3, Seite 744]

34

- Ab  $n > 30$  Näherung:

– Beispiel:  $x_{0,975}$  aus

35

---

## 4.2 $t$ -Verteilung

- Ist  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Z \sim \chi^2(n)$ ,  $X$ ,  $Z$  unabhängig, so wird die Verteilung von

36

---

als  $t$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden bezeichnet.

- Kurzschreibweise: |

37

---

- Es gilt: |

38

---

- Fraktile:

– Tabelle 2, siehe auch [Pap11, Tabelle 4, Seite 746]

– Ab  $n > 30$  Näherung |

39

---

– Achtung: |

40

---

– Beispiel: Bestimme folgende Fraktile für  $t(10)$ :

41

---



## 5 Verteilungen wichtiger Stichprobenfunktionen

Gegeben: Einfache Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  aus  $N(\mu, \sigma)$ -Verteilung:

Stichprobenfunktion	Verteilung
$\sum_{i=1}^n X_i$ $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2$ $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}$	42
Beliebige Verteilung	43

## 6 Übungsaufgaben

$X_i$  (mit  $i = 1, \dots, n$ ) seien unabhängige, jeweils  $N(\mu, \sigma)$ -verteilte Zufallsvariable. Geben Sie für jede der folgenden Größen die Zahl  $x_{0.95}$  an, die mit 5% Wahrscheinlichkeit überschritten wird (zum Beispiel für (a):  $P(x_{0.95} < A) = 0.05$ ).

(a)  $A = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^7 (X_i - \bar{X})^2$

(b)  $B = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{137} (X_i - \bar{X})^2$

(c)  $C = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{12} (X_i - \mu)^2$

(d)  $D = \frac{\sum_{i=1}^{16} X_i - 16\mu}{4S}$  (mit  $S^2$ : Stichprobenvarianz von  $X$ )

## Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.

Tabelle 1: Fraktile der  $\chi^2$ -Verteilung

$n$	$p$									
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0	0	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01	0.02	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.21	10.6
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.35	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.69	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.18	2.733	3.49	13.36	15.51	17.54	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.7	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.94	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.27	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.3
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.66	5.629	6.571	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25	27.49	30.58	32.8
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.3	28.84	32	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.39	10.87	25.99	28.87	31.53	34.8	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.2	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.26	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.8
24	9.886	10.86	12.4	13.85	15.66	33.2	36.41	39.36	42.98	45.56
26	11.16	12.2	13.84	15.38	17.29	35.56	38.88	41.92	45.64	48.29
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.8	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.5	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.4	79.08	83.3	88.38	91.95
70	43.27	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Tabelle 2: Fraktile der  $t$ -Verteilung

$n$	$p$				
	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
500	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576