

3 Übungen zu Verteilungsparameter, Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 15. März 2016, 10:05



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Reviewfragen

- Wie sind Modus, Median und α -Fraktile definiert?
- Wie lässt sich das α -Fraktile bestimmen, wenn der exakte Wert nicht vertafelt ist?
- Beschreiben Sie eine konvexe / konkave Funktion.
- Was ist die Varianz / Standardabweichung einer Zufallsvariablen?
- Was ist der Unterschied zwischen Stichprobenmittel \bar{X} und Erwartungswert $E(X)$?
- Wie lässt sich für diskrete Zufallsvariablen X, Y die Rand-Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ von $f(x, y)$ bestimmen?
- Was besagt der zentrale Grenzwertsatz?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz, Modus und Median folgender Verteilungen der Zufallsvariablen X :

(a) X diskret mit

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(b) X diskret mit

x_i	-2	-1	0	2	4	7	8
$f(x_i)$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.05

(c) X stetig mit

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Die diskreten Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig und wie folgt verteilt:

x_i	0	1	2
$f_1(x_i)$	0.1	0.3	

y_i	2	4	6
$f_2(y_i)$	0.2		0.1

Bestimmen Sie die fehlenden Einzelwahrscheinlichkeiten und dann die Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x_i, y_j)$.

Aufgabe 4:

Gegeben ist die *unvollständige* Verteilungstabelle der diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y)

	Y	0	1	2	
X					
2		0.07			0.2
3			0.15	0.175	
4		0.105	0.09		0.3
			0.3		

Bestimmen Sie die fehlenden Einzelwahrscheinlichkeiten und dann $f_1(x_i)$, $f_2(y_j)$, $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(Y)$. Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 5:

Die Verteilung einer stetigen zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) hat die Dichtefunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x + y) & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \quad 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

- (a) die Konstante k ,
- (b) die Dichten $f_1(x)$ und $f_2(y)$ der Randverteilungen,
- (c) die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$, sowie die Varianzen $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$ und
- (d) die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 1.6, Y \leq 2.2)$ und $P(1.1 \leq X \leq 1.5, 2.3 \leq Y \leq 2.6)$

Aufgabe 6:

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $H(y)$ und die Dichtefunktion $h(y)$ für die von X abhängige Zufallsvariable $Y = \ln(X)$.

Hinweis: Bestimmen Sie in folgender Reihenfolge:

1. den Wertebereich von Y
2. die Verteilungsfunktion $H(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y)$
3. die Dichtefunktion $h(y) = \frac{dH(y)}{dy}$

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass für $Y = g(X)$ der Erwartungswert $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx$ ist.

Hinweis: Gehen Sie der Einfachheit halber davon aus, dass $g(X)$ stetig und streng monoton ist. Nutzen Sie die Erkenntnisse aus der vorigen Aufgabe.

3 Lösungen

Lösung Aufgabe 1:

- (a)
- x_{Mod} ist Maximum der Wahrscheinlichkeits- oder Dichtefunktion (im Allgemeinen nicht eindeutig, zum Beispiel Gleichverteilung)
 - $F(x_{\text{Med}}) = \frac{1}{2}$, oder kleinstes x mit $F(x) > \frac{1}{2}$
 - $F(x_\alpha) = \alpha$
- (b) Durch Interpolation.
- (c) Konvex / konkav: nach außen / innen gewölbt, aus Sicht der x -Achse, z.B. $y = x^2 / y = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$
- (d) Die Varianz ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Erwartungswert: $\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2$. Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz.
- (e) \bar{X} ist der Mittelwert, der sich aus einer bestimmten Stichprobe ergibt, $E(X)$ ist der theoretische Wert, der sich aus der Verteilung ergibt.
- (f) $f_1(x) = \sum_{i=1}^m f(x, y_i)$, $f_2(y) = \sum_{j=1}^n f(x_j, y)$, für Zufallsvariablen X und Y mit den Werten x_1, x_2, \dots, x_m und y_1, y_2, \dots, y_n .
- (g) Summen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen sind für große n normalverteilt.

Lösung Aufgabe 2:

- (a) $E(X) = 2.75$, $\text{Var}(X) = 1.4375$, $x_{\text{Mod}} = 2$, $x_{\text{Med}} = 2$
- (b) $E(X) = 2.3$, $\text{Var}(X) = 7.51$, $x_{\text{Mod}} = 2$, $x_{\text{Med}} = 2$
- (c) $E(X) = \frac{4}{3}$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{18}$, $x_{\text{Mod}} = 1$, $x_{\text{Med}} = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}} = 1.2929$

Lösung Aufgabe 3:

	Y				
$X \backslash$		2	4	6	$f_1(x_i)$
0		0.02	0.07	0.01	0.1
1		0.06	0.21	0.03	0.3
2		0.12	0.42	0.06	0.6
$f_2(y_j)$		0.2	0.7	0.1	1.0

Lösung Aufgabe 4:

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_1(x_i)$
2	0.07	0.06	0.07	0.2
3	0.175	0.15	0.175	0.5
4	0.105	0.09	0.105	0.3
$f_2(y_j)$	0.35	0.3	0.35	1

$$E(X) = 3.1 \quad E(Y) = 1 \quad \text{Var}(X) = 0.49 \quad \text{Var}(Y) = 0.7$$

X und Y sind unabhängig, weil $f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \cdot f_2(y_j)$ für alle i, j gilt.

Lösung Aufgabe 5:

(a)

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= k \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \psi) \, d\psi \, d\xi = k \int_1^x \int_2^y f(\xi, \psi) \, d\psi \, d\xi \\
 &= k \int_1^x \int_2^y (\xi + \psi) \, d\psi \, d\xi = k \int_1^x \left[\psi\xi + \frac{\psi^2}{2} \right]_2^y \, d\xi \\
 &= k \int_1^x \left(\xi y + \frac{y^2}{2} - 2\xi - 2 \right) \, d\xi = k \left[\frac{\xi^2 y}{2} + \frac{\xi y^2}{2} - \xi^2 - 2\xi \right]_1^x \\
 &= k \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} - x^2 - 2x - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} + 3 \right)
 \end{aligned}$$

Es muss gelten $F(+\infty, +\infty) = F(2, 3) = 4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$. Die Verteilungsfunktion ist somit

$$\frac{1}{8} (x^2 y + xy^2 - 2x^2 - 4x - y - y^2 + 6)$$

(b)

$$F_1(x) = F(x, \infty) = F(x, 3) = \frac{1}{8} (3x^2 + 9x - 2x^2 - 4x - 3 - 9 + 6) = \frac{1}{8} (x^2 + 5x - 6)$$

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \frac{2x + 5}{8}$$

$$F_2(y) = F(\infty, y) = F(2, y) = \frac{1}{8} (4y + 2y^2 - 8 - 8 - y - y^2 + 6) = \frac{1}{8} (y^2 + 3y - 10)$$

$$f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \frac{2y + 3}{8}$$

(c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x) dx = \int_1^2 x \cdot \frac{2x+5}{8} dx = \frac{73}{48} = 1.5208$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y) dy = \int_2^3 y \cdot \frac{2y+3}{8} dx = \frac{121}{48} = 2.5208$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_1(x) dx = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2x+5}{8} dx = 2.3958$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0.0829$$

$$E(Y^2) = 6.4375 \Rightarrow \text{Var}(Y) = 0.0829$$

$$(d) P(X \leq 1.6, Y \leq 2.2) = F(1.6, 2.2) = 0.102$$

$$P(1.1 \leq X \leq 1.5, 2.3 \leq Y \leq 2.6) = \int_{1.1}^{1.5} \int_{2.3}^{2.6} f(x, y) dy dx = 0.1125$$

Lösung Aufgabe 6:

$$F(x) = x^3$$

$$1. Y = \ln X \Rightarrow -\infty < y \leq 0$$

$$2. H(y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y) = F(e^y) = e^{3y}$$

$$3. h(y) = \begin{cases} 3e^{3y} & \text{für } -\infty < y \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung Aufgabe 7:

Es sei $h(y)$ die Dichte- und $H(y)$ die Verteilungsfunktion von Y . Es gilt zudem

$$y = g(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y) \quad dy = g'(x) dx \quad H(y) = F(g^{-1}(y))$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot h(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{dH(y)}{dy} g'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{dF(g^{-1}(y))}{dy} g'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{dF(x)}{g'(x) dx} g'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{dF(x)}{dx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \end{aligned}$$