

③ Verteilungsparameter, Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 23. März 2016, 11:07

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1	Verteilungsparameter	2
1.1	Lageparameter	2
1.2	Streuungsparameter	5
1.3	Erwartungswert und Varianz wichtiger Verteilungen	6
1.4	Weitere Aussagen über Erwartungswert und Varianz	6
1.5	Kovarianz und Korrelation	7
1.6	Weitere Aussagen über Kovarianz und Korrelation	8
1.7	Übungsaufgaben	8
2	Mehrdimensionale Zufallsvariablen	9
2.1	Mehrdimensionale diskrete Zufallsvariablen	9
2.2	Mehrdimensionale stetige Zufallsvariablen	9
2.3	Gesetz der großen Zahlen	10
2.4	Zentraler Grenzwertsatz	11
2.5	Übungsaufgaben	13

1 Verteilungsparameter¹

1.1 Lageparameter

Modus oder Modalwert x_{Mod} : (siehe auch [Pap11, Seite 486])

$$^1 \left| f(x_{\text{Mod}}) \geq f(x) \text{ für alle } x \right.$$

Im Allgemeinen *nicht* eindeutig, zum Beispiel Gleichverteilung.

Beispiele:

• Normalverteilung: $^2 \left| x_{\text{Mod}} = \mu \right.$

• Diskrete Verteilung mit $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{array} \Rightarrow \left. ^3 x_{\text{Mod}} = 1 \right.$

Median oder Zentralwert x_{Med} :

$$^4 \left| F(x_{\text{Med}}) = \frac{1}{2} \text{ bzw. kleinstes } x \text{ mit } F(x) > \frac{1}{2} \right.$$

Beispiele:

• Normalverteilung: $^5 \left| x_{\text{Med}} = \mu \right.$

• Diskrete Verteilung oben: $^6 \left| F(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, F(1) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \Rightarrow x_{\text{Med}} = 1 \right.$

α -Fraktile x_α (wird auch Quantil, oder Perzentil genannt)

$$^7 \left| P(X \leq x_\alpha) = F(x_\alpha) = \alpha \right.$$

¹[Pap11, Teil II, Kapitel 5]

Beispiel: $X \sim N(0, 1), Y \sim N(3, 2)$

$$\begin{array}{l} x_{0.975} = 1.96 \\ x_{0.025} = -x_{0.975} = -1.96 \\ y_{0.025} = 2 \cdot x_{0.025} + 3 = -0.92 \end{array}$$

Hinweise:

- $x_{\text{Med}} = x_{0.5}$

- Falls x_α nicht vertafelt \Rightarrow Interpolation:

$$x_\alpha = x_a + (x_b - x_a) \frac{\alpha - a}{b - a} \quad \left(\begin{array}{l} a \text{ größte vertafelte Zahl} < \alpha \\ b \text{ kleinste vertafelte Zahl} > \alpha \end{array} \right)$$

Beispiel: $X \sim N(0, 1)$

$$x_{0.6} \approx 0.25 + (0.26 - 0.25) \cdot \frac{0.6 - 0.5987}{0.6026 - 0.5987} = 0.2533$$

Erwartungswert $E(X)$ bzw. μ :

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Beispiele:

- Normalverteilung: $E(X) = \mu$
- Diskrete Verteilung oben:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Rechenregeln für den Erwartungswert

(R1) Ist f symmetrisch bezüglich a , so gilt $E(X) = a$

Beispiel: Gleichverteilung: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

(R2) Ist $Y = g(X)$, so gilt

$$E(Y) = E(g(x)) = \begin{cases} \sum_i g(x_i) f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Beispiel: X gleichverteilt in $[1, 4]$

$$E(X) = \frac{1+4}{2} = 2.5$$

$$E(X^2) = \int_1^4 x^2 \cdot \frac{1}{4-1} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^4 = \frac{1}{9} (64 - 1) = \frac{63}{9} = 7$$

(R3) **Lineare Transformation:**

Spezialfall von (R2) mit $g(x) = a+bx$: $E(a + bX) = a + b \cdot E(X)$

(R4) **Summenbildung:**

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

Beispiel: X gleichverteilt in $[0, 10]$, $Y \sim N(1, 1)$, $Z = X + 5Y$

$$E(Z) = E(X + 5Y) = E(X) + E(5Y) = E(X) + 5 \cdot E(Y) \\ = \frac{10+0}{2} + 5 \cdot 1 = 10$$

(R5) **Unabhängigkeit:**

$$X, Y \text{ unabhängig} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{21} \\ \hline E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \end{array}$$

(R6) Ist stets $X \leq Y$, so gilt $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{22} \\ \hline E(X) \leq E(Y) \end{array}$

(R7) **Jensensche Ungleichung:** In der Situation (R2) gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{23} \\ \hline \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} E(g(X)) \geq g(E(X)), \quad \text{falls } g \text{ konvex} \\ E(g(X)) \leq g(E(X)), \quad \text{falls } g \text{ konkav} \end{array}$$

Beispiel: X gleichverteilt in $[1, 4]$, $g(x) = x^2$ (vgl. (R2))

$$\left. \begin{array}{l} \text{24} \\ \hline \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} g(x) \text{ ist konvex} \Rightarrow \\ E(g(X)) = E(X^2) = 7 > 6.25 = 2.5^2 = (E(X))^2 = g(E(X)) \end{array}$$

1.2 Streuungsparameter

Varianz $\text{Var}(X)$ oder σ^2 : Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Erwartungswert:

$$\left. \begin{array}{l} \text{25} \\ \hline \\ \end{array} \right| \text{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = \begin{cases} \sum_i (x_i - E(X))^2 f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Standardabweichung $\text{Sta}(X)$ oder σ : $\text{Sta}(X) = \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Beispiel: Diskrete Verteilung oben:

$$\left. \begin{array}{l} \text{26} \\ \hline \\ \end{array} \right| \text{Var}(X) = \left((0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

Rechenregeln für die Varianz

R1 **Verschiebungssatz:**

$$\left. \begin{array}{l} \text{27} \\ \hline \\ \end{array} \right| \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Beispiel: Diskrete Verteilung oben:

28

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2} = \text{Var}(X)$$

R2 Lineare Transformation:

29

$$\text{Var}(a + bX) = b^2 \cdot \text{Var}(X)$$

R3 Summenbildung:

30

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

Voraussetzung: Unabhängigkeit der X_i !

1.3 Erwartungswert und Varianz wichtiger Verteilungen

Verteilung von X	$E(X)$	$\text{Var}(X)$
Binomialverteilung $B(n, p)$	np	$np(1 - p)$
Hypergeom. Verteilung $Hyp(N, M, n)$	$n \cdot \frac{M}{N}$	$n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N - M}{N} \cdot \frac{N - n}{N - 1}$
Poisson-Verteilung $P(\mu)$	μ	μ
Gleichverteilung in $[a, b]$ mit $a < b$	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{(b - a)^2}{12}$
Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$	μ	σ^2

1.4 Weitere Aussagen über Erwartungswert und Varianz

1. Ist X beliebig verteilt mit $E(X) = \mu$ und $\text{Var}(X) = \sigma^2$, so besitzt

32

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

den Erwartungswert $\overset{33}{|} 0$ und die Varianz $\overset{34}{|} 1$

2. Sind X_1, \dots, X_n unabhängig mit $E(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$, so besitzt das Stichprobenmittel

35

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

den Erwartungswert $\overset{36}{|} \mu$ und die Varianz $\overset{37}{|} \frac{\sigma^2}{n}$

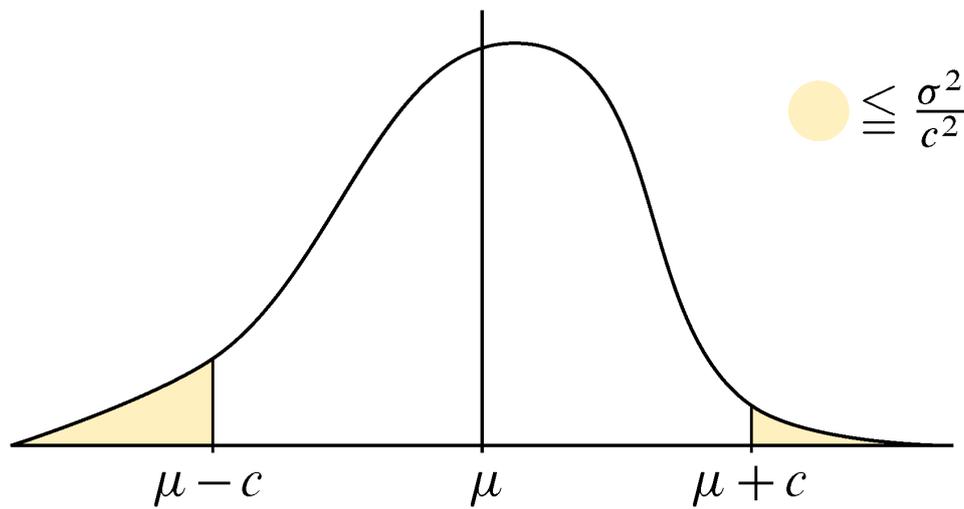
3. Ungleichung von Tschebyscheff:

38

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2}$$

wobei X beliebig verteilt sein darf.

39



1.5 Kovarianz und Korrelation

Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$:

40

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(x)) \cdot (Y - E(Y))] \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \quad (\text{Verschiebungssatz}) \end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$:

41

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

Bemerkungen:

- $\rho \in [-1, 1]$
- $|\rho| = 1 \Leftrightarrow Y = a + bX$ mit $(b \neq 0)$
- $\rho = 0 \Leftrightarrow X, Y$ unkorreliert

1.6 Weitere Aussagen über Kovarianz und Korrelation

- Sind X, Y unabhängig, so gilt:

42

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow \rho(X, Y) = 0$$

\Rightarrow Aus Unabhängigkeit folgt Unkorreliertheit.

- Rechenregeln für die Kovarianz:

43

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, X) &= \text{Var}(X) \\ \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(Y, X) \\ \text{Cov}(a + bX, c + dY) &= b \cdot d \cdot \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X + Y, Z) &= \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z) \end{aligned}$$

- Summe zweier Zufallsvariablen:

$$\text{Var}(X+Y) = \overset{44}{\text{Var } X + \text{Var } Y + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y)}$$

- Differenz zweier Zufallsvariablen:

$$\text{Var}(X-Y) = \overset{45}{\text{Var } X + \text{Var } Y - 2 \cdot \text{Cov}(X, Y)}$$

1.7 Übungsaufgaben

[Pap11, Zu Abschnitt 5, Seite 459ff]

2 Mehrdimensionale Zufallsvariablen²

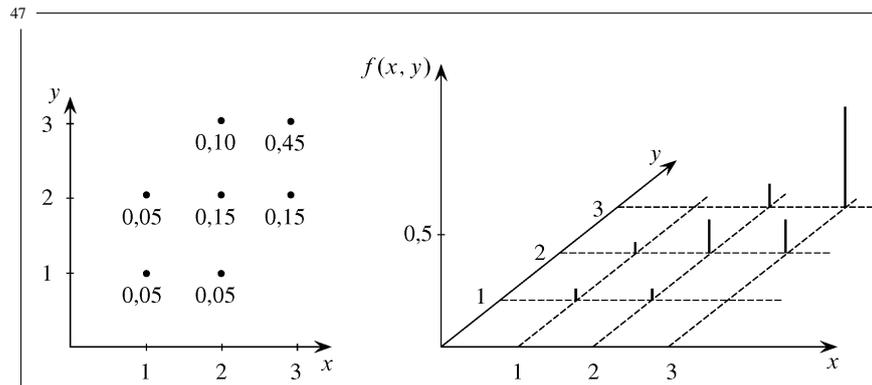
2.1 Mehrdimensionale diskrete Zufallsvariablen

- (X_1, \dots, X_n) heißt *diskret*, falls der Wertebereich endlich ist.

- Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

- Darstellungsmöglichkeiten: Tabelle, Streuungsdiagramm, Stabdiagramm.



2.2 Mehrdimensionale stetige Zufallsvariablen

- (X_1, \dots, X_n) heißt *stetig*, wenn es eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ gibt, so dass die Verteilungsfunktion F folgende Gestalt hat:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1$$

- $f(x_1, \dots, x_n)$ heißt *gemeinsame Dichte* von (X_1, \dots, X_n)
- Wir beschäftigen uns im Weiteren vor allem mit zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) oder (X_1, X_2)

- Randverteilungsfunktion: $F_1(x) = F(x, \infty), F_2(y) = F(\infty, y)$

- Rand-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

²[Pap11, Teil II, Kapitel 7]

- Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \text{ bzw. } f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

- Unabhängigkeit: (X_1, \dots, X_n) sind genau dann unabhängig, wenn gilt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$$

2.3 Gesetz der großen Zahlen

- Gegeben: Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit den Eigenschaften:

- unabhängig und identisch verteilt („i.i.d.“)
- $E(X_i) = \mu$
- $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

- Gesucht: Verhalten von

$$\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{oder} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

wenn n laufend erhöht wird.

- Bekannt: siehe Lücken 35, 36 und 37:

$$E(\bar{X}_n) = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Ungleichung von Tschebyscheff (Lücke 38)

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2}$$

angewandt auf

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

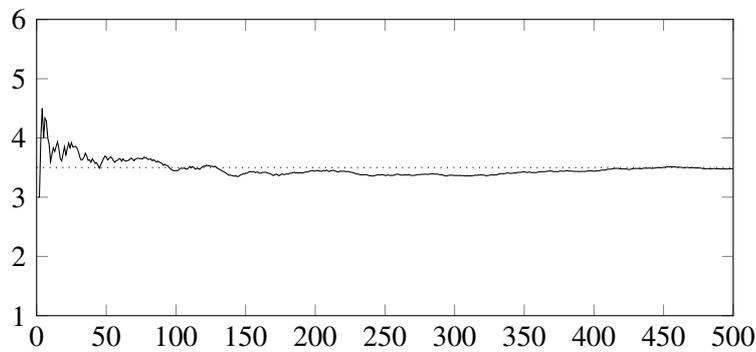
$$\text{ergibt} \left| \begin{array}{l} \text{58} \\ P(|\bar{X}_n - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{nc^2} \end{array} \right.$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt dann das *Gesetz der großen Zahlen*:

$$\begin{array}{l} \text{59} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq c) = 0 \quad \text{bzw.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \leq c) = 1 \end{array}$$

- Beispiel: Simulation 500 mal Würfeln

$$\text{E}(X) = \left| \begin{array}{l} \text{60} \\ 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5 \end{array} \right.$$



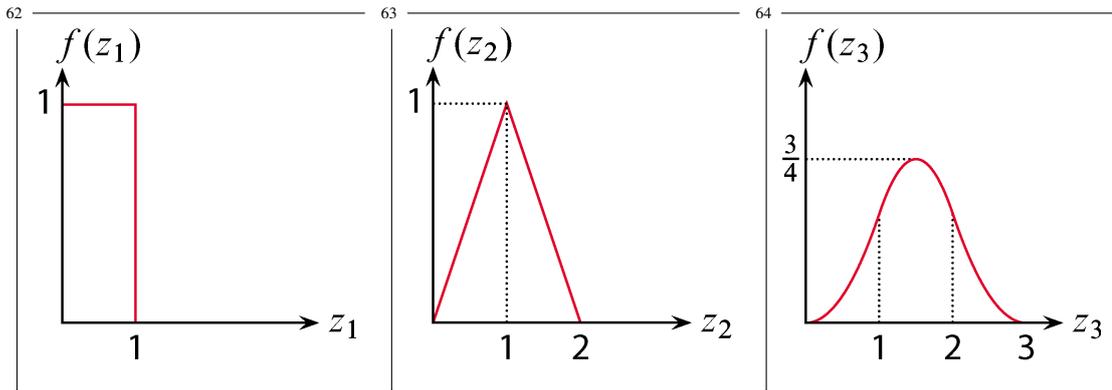
2.4 Zentraler Grenzwertsatz

- Summen von i.i.d. Zufallsvariablen sind für große n näherungsweise $\left. \begin{array}{l} \text{61} \\ \text{normalverteilt} \end{array} \right|$
- Beispiel: X_1, X_2, X_3 in $[0, 1]$ gleichverteilt

$$Z_1 = X_1$$

$$Z_2 = X_1 + X_2$$

$$Z_3 = X_1 + X_2 + X_3$$



⇒ Zentraler Grenzwertsatz:

65

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

- Approximationsvoraussetzungen:

- Im Allgemeinen: $n > 30$

- Spezialfall Binomialverteilung: $np \geq 5$ und $n(1-p) \geq 5$

- Gauß-Statistik:

68

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Beispiel:

Gegeben: X_1, \dots, X_{12} gleichverteilt in $[0, 1]$

Gesucht: approximative Verteilung von $Y = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6$

Mit den Lücken 18, 19, 29 und 30 folgt

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{12} E(X_i) - 6 = 12 \cdot \frac{1}{2} - 6 = 0 \\ \text{Var}(Y) &= \sum_{i=1}^{12} \text{Var}(X_i) - 6 = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1 \\ &\Rightarrow Y \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

Lücke 65 $n > 30 \Rightarrow n = 12$ ist eine schlechte Approximation!

2.5 Übungsaufgaben

[Pap11, Zu Abschnitt 7, Seite 467ff]