

② Übungen zu Verteilungen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 15. März 2016, 09:54



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Reviewfragen

- (a) Nennen Sie den kleinsten und größten Wert jeder Verteilungsfunktion.
- (b) Kann eine Verteilungsfunktion in einem Bereich auch konstant sein?
- (c) Was ist der Unterschied zwischen Binomial- und Hypergeometrischer Verteilung.
- (d) Wieso ist die Binomialverteilung nur für $p \leq 0.5$ tabelliert?
- (e) Was ist die herausragende Eigenschaft der Exponentialverteilung?

Aufgabe 2:

Ein Bowlingspieler werfe mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.25$ einen Strike (alle Pins im ersten Wurf abräumen). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in 10 Würfungen *mindestens*, *genau* oder *höchstens* zwei Strikes wirft?

Aufgabe 3:

Wie oft muss ein Laplace-Würfel mit zwei schwarzen und vier weißen Seitenflächen geworfen werden, damit mindestens einmal *schwarz* mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \geq 95\%$ geworfen wird?

Aufgabe 4:

Sie entnehmen einer Schachtel mit 16 schwarzen und 16 weißen Schachfiguren nacheinander fünf Figuren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den entnommenen Figuren höchstens, genau, mindestens ein König ist?

Aufgabe 5:

Durchschnittlich fallen in einem Fußball-Bundesligaspiel drei Tore in 90 Minuten. Die Wahrscheinlichkeit eines Tors sei in jeder Spielminute unabhängig von den anderen Spielminuten gleich wahrscheinlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den 90 Minuten genau vier Tore, gar keine, mehr als zwei Tore fallen?

Aufgabe 6:

Die stetige Zufallsvariable X sei im Intervall $[2, 7]$ gleichverteilt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X < 2.5) \quad P(X \geq 3.5) \quad P(4 < X < 5)$$

Aufgabe 7:

Sie stehen im Supermarkt an einer Warteschlange. Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie höchstens 4 Minuten warten müssen, sei 95 %. Bestimmen Sie den Parameter λ der exponentialverteilten Wartezeit.

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie für $X \sim N(0, 1)$ mit Hilfe der Tabelle 1 die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq 0.1) \quad P(X \leq -1) \quad P(-1.1 \leq X < -0.1) \quad P(1 < X < 2) \quad P(|X| < 1) \quad P(|X| > 2)$$

Aufgabe 9:

Bestimmen Sie für $X \sim N(2.6, 1.1)$ mit Hilfe der Tabelle 1 die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(3 \leq X < 4) \quad P(X \geq 2) \quad P(X < 1.5) \quad P(X = 1) \quad P(|X| \leq 2) \quad P(|X| > 1)$$

Aufgabe 10:

Bestimmen Sie den 3σ -Bereich der Verteilung $X \sim N(-3, 2)$.

Aufgabe 11:

Die erreichte Punktzahl in einer Klausur sei eine normalverteilte Zufallsgröße X mit dem Mittelwert $= 45$ und der Standardabweichung $\sigma = 5$ (in Punkten). 67 % der teilgenommenen Studenten bestanden die Klausur. Welche Mindestpunktzahl war somit zu erreichen?

Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standardnormalverteilung

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 2: Fraktile der Standard-Normalverteilung

α	x_α	α	x_α	α	x_α	α	x_α	α	x_α
0.9999	3.7190	0.9955	2.6121	0.9750	1.9600	0.9350	1.5141	0.7300	0.6128
0.9998	3.5401	0.9950	2.5758	0.9740	1.9431	0.9300	1.4758	0.7200	0.5828
0.9997	3.4316	0.9945	2.5427	0.9730	1.9268	0.9250	1.4395	0.7100	0.5534
0.9996	3.3528	0.9940	2.5121	0.9720	1.9110	0.9200	1.4051	0.7000	0.5244
0.9995	3.2905	0.9935	2.4838	0.9710	1.8957	0.9150	1.3722	0.6900	0.4959
0.9994	3.2389	0.9930	2.4573	0.9700	1.8808	0.9100	1.3408	0.6800	0.4677
0.9993	3.1947	0.9925	2.4324	0.9690	1.8663	0.9050	1.3106	0.6700	0.4399
0.9992	3.1559	0.9920	2.4089	0.9680	1.8522	0.9000	1.2816	0.6600	0.4125
0.9991	3.1214	0.9915	2.3867	0.9670	1.8384	0.8950	1.2536	0.6500	0.3853
0.9990	3.0902	0.9910	2.3656	0.9660	1.8250	0.8900	1.2265	0.6400	0.3585
0.9989	3.0618	0.9905	2.3455	0.9650	1.8119	0.8850	1.2004	0.6300	0.3319
0.9988	3.0357	0.9900	2.3263	0.9640	1.7991	0.8800	1.1750	0.6200	0.3055
0.9987	3.0115	0.9895	2.3080	0.9630	1.7866	0.8750	1.1503	0.6100	0.2793
0.9986	2.9889	0.9890	2.2904	0.9620	1.7744	0.8700	1.1264	0.6000	0.2533
0.9985	2.9677	0.9885	2.2734	0.9610	1.7624	0.8650	1.1031	0.5900	0.2275
0.9984	2.9478	0.9880	2.2571	0.9600	1.7507	0.8600	1.0803	0.5800	0.2019
0.9983	2.9290	0.9875	2.2414	0.9590	1.7392	0.8550	1.0581	0.5700	0.1764
0.9982	2.9112	0.9870	2.2262	0.9580	1.7279	0.8500	1.0364	0.5600	0.1510
0.9981	2.8943	0.9865	2.2115	0.9570	1.7169	0.8450	1.0152	0.5500	0.1257
0.9980	2.8782	0.9860	2.1973	0.9560	1.7060	0.8400	0.9945	0.5400	0.1004
0.9979	2.8627	0.9855	2.1835	0.9550	1.6954	0.8350	0.9741	0.5300	0.0753
0.9978	2.8480	0.9850	2.1701	0.9540	1.6849	0.8300	0.9542	0.5200	0.0502
0.9977	2.8338	0.9845	2.1571	0.9530	1.6747	0.8250	0.9346	0.5100	0.0251
0.9976	2.8202	0.9840	2.1444	0.9520	1.6646	0.8200	0.9154	0.5000	0.0000
0.9975	2.8070	0.9835	2.1321	0.9510	1.6546	0.8150	0.8965		
0.9974	2.7944	0.9830	2.1201	0.9500	1.6449	0.8100	0.8779		
0.9973	2.7822	0.9825	2.1084	0.9490	1.6352	0.8050	0.8596		
0.9972	2.7703	0.9820	2.0969	0.9480	1.6258	0.8000	0.8416		
0.9971	2.7589	0.9815	2.0858	0.9470	1.6164	0.7950	0.8239		
0.9970	2.7478	0.9810	2.0749	0.9460	1.6072	0.7900	0.8064		
0.9969	2.7370	0.9805	2.0642	0.9450	1.5982	0.7850	0.7892		
0.9968	2.7266	0.9800	2.0537	0.9440	1.5893	0.7800	0.7722		
0.9967	2.7164	0.9795	2.0435	0.9430	1.5805	0.7750	0.7554		
0.9966	2.7065	0.9790	2.0335	0.9420	1.5718	0.7700	0.7388		
0.9965	2.6968	0.9785	2.0237	0.9410	1.5632	0.7650	0.7225		
0.9964	2.6874	0.9780	2.0141	0.9400	1.5548	0.7600	0.7063		
0.9963	2.6783	0.9775	2.0047	0.9390	1.5464	0.7550	0.6903		
0.9962	2.6693	0.9770	1.9954	0.9380	1.5382	0.7500	0.6745		
0.9961	2.6606	0.9765	1.9863	0.9370	1.5301	0.7450	0.6588		
0.9960	2.6521	0.9760	1.9774	0.9360	1.5220	0.7400	0.6433		

2 Lösungen

Lösung Aufgabe 1:

Lösung Aufgabe 2:

Binomialverteilung $B(10, 0.25)$.

- Mindestens zwei Strikes:
Mit tabellierter Binomialverteilung im Skript:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.244 = 0.756$$

Mit Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^9 \\ &= 1 - 0.0563 - 0.1877 \\ &= 0.756 \end{aligned}$$

- Genau zwei Strikes:

Tabelle: $P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0.5256 - 0.2440 = 0.2816$

W'-Funktion: $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^8 = 0.2816$

- Höchstens zwei Strikes:

Tabelle: $P(X \leq 2) = F(2) = 0.5256$

W'-Funktion:
$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= \binom{10}{2} \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^8 \\ &\quad + \binom{10}{1} \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^9 \\ &\quad + \binom{10}{0} \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^{10} \\ &= 0.5256 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 3:

Die Anzahl X der schwarzen Würfe ist binomialverteilt $X \sim B(n, \frac{1}{3})$. Gesucht ist

$$\begin{aligned}
 & P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0.95 \\
 \Leftrightarrow & P(X = 0) \leq 0.05 \\
 \Leftrightarrow & \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0.05 \\
 \Leftrightarrow & n \ln \frac{2}{3} \leq \ln 0.05 \\
 \Leftrightarrow & n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln \frac{2}{3}} \\
 \Leftrightarrow & n \geq 7.3
 \end{aligned}$$

Man muss mindestens achtmal würfeln.

Lösung Aufgabe 4:

Die Anzahl X der gezogenen Könige ist hypergeometrisch verteilt $X \sim Hyp(32, 2, 5)$. Gesucht ist

- höchstens ein König:

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 1) &= 1 - P(X = 2) \\
 &= 1 - \frac{\binom{2}{2} \binom{30}{3}}{\binom{32}{5}} \\
 &= 0.9798
 \end{aligned}$$

- genau ein König:

$$\begin{aligned}
 P(X = 1) &= \frac{\binom{2}{1} \binom{30}{4}}{\binom{32}{5}} \\
 &= 0.2722
 \end{aligned}$$

- mindestens ein König:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\
 &= 1 - \frac{\binom{2}{0} \binom{30}{5}}{\binom{32}{5}} \\
 &= 0.2923
 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 5:

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer beliebigen Spielminute ein Tor fällt ist $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$. Die Anzahl X der Tore ist binomialverteilt $X \sim B(90, \frac{1}{30})$. Wegen

$$\begin{aligned} n \cdot p &= 3 &< 10 \\ n = 90 &> 1500 \cdot p &= 50 \end{aligned}$$

darf mit der Poisson-Verteilung mit $\lambda = n \cdot p = 3$ approximiert werden. Gesucht ist

- genau vier Tore:

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \frac{3^4}{4!} e^{-3} \\ &= 0.17 \end{aligned}$$

- gar kein Tor:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{3^0}{0!} e^{-3} \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

- mehr als zwei Tore:

Tabelle:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - F(2) \\ &= 1 - 0.42 \\ &= 0.58 \end{aligned}$$

W'-Funktion:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - f(2) - f(1) - f(0) \\ &= 1 - \frac{3^2}{2!} e^{-3} - \frac{3^1}{1!} e^{-3} - \frac{3^0}{0!} e^{-3} \\ &= 1 - 0.22 - 0.15 - 0.05 \\ &= 0.58 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 6:

$$\begin{aligned} P(X < 2.5) &= P(X \leq 2.5) \\ &= F(2.5) = \frac{2.5 - 2}{7 - 2} \\ &= 0.10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3.5) &= 1 - P(X \leq 3.5) \\ &= 1 - F(3.5) \\ &= 0.70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(4 < X < 5) &= F(5) - F(4) \\ &= 0.20 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 7:

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= F(4) = 0.95 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot 4} &= 0.95 \\ \Leftrightarrow e^{-\lambda \cdot 4} &= 0.05 \\ -\lambda \cdot 4 &= \ln 0.05 \\ \lambda &= 0.75 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 8:

$$\begin{aligned} P(X \leq 0.1) &= 0.5398 & P(X \leq -1) &= 0.1587 & P(-1.1 \leq X \leq -0.1) &= 0.3245 & P(1 \leq X \leq 2) &= 0.1359 \\ P(|X| < 1) &= P(-1 \leq X \leq 1) &= 0.6827 & P(|X| > 2) &= 1 - P(-2 \leq X \leq 2) &= 0.0455 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 9:

$$\begin{aligned} P(3 \leq X < 4) &= 0.2565 & P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 0.7073 & P(X < 1.5) &= 0.1587 & P(X = 1) &= 0 \\ P(|X| \leq 2) &= P(-2 \leq X \leq 2) &= 0.2927 & P(|X| > 1) &= 1 - P(-1 \leq X \leq 1) &= 0.9276 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 10:

$$[-3 - 3 \cdot 2, -3 + 3 \cdot 2] = [-9, 3]$$

Lösung Aufgabe 11:

$$X \sim N(45, 5)$$

$$1 - \Phi\left(\frac{X - 45}{5}\right) = \Phi\left(\frac{45 - X}{5}\right) = 0.67$$

$$\frac{45 - x}{5} = 0.4399$$

$$\Rightarrow x = 42.8$$