

① Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zufallsvariablen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 19. Mai 2015, 15:51



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Aufgabe 1: Reviewfragen

- (a) Wie unterscheiden sich Elementarereignisse ω_i von Ereignissen A_j ?
- (b) Unter welcher Voraussetzung gilt $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$?
- (c) Unter welcher Voraussetzung gilt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$?
- (d) Unter welcher Voraussetzung gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$?
- (e) Warum gilt für eine stetige Zufallsvariable X $P(X = x) = 0$?

Aufgabe 2: Laplace-Wahrscheinlichkeit

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Wahrscheinlichkeit die Chance, bei einem Wurf mit drei unabhängigen Laplace-Würfeln drei gleiche Augenzahlen, zu würfeln.
- (b) In einer fünfstelligen Zahl kommt jede Ziffer nur einmal vor. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl (i) gerade, (ii) durch 5 teilbar?
- (c) Eine Familie hat sechs Kinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind
 - (i) die ersten zwei Kinder Söhne,
 - (ii) nur die ersten zwei Kinder Söhne,
 - (iii) genau zwei Kinder Söhne,
 - (iv) mindestens zwei Kinder Söhnewenn die Wahrscheinlichkeit für Sohn und Tochter gleich sind?

Aufgabe 3: Urnenmodell

- (a) Auf wie viele Arten lassen sich 5 Hotelgäste in 15 freien Einzelbettzimmern unterbringen?
- (b) Für das Elfmeterschießen muss der Trainer 5 von 11 Spielern auf dem Platz benennen. Wie viele Möglichkeiten hat er bei der Bestimmung der Kandidaten?
- (c) Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \quad \text{für alle } n, k \geq 1$$

- (d) Beim Fußball-Toto kann bei jedem der dreizehn Spiele eine 0 (unentschieden), eine 1 (Heimmannschaft gewinnt) oder eine 2 (Gastmannschaft gewinnt) angekreuzt werden. Wie viele verschiedene Tippmöglichkeiten gibt es?
- (e) Ein Katzenbesitzer hat fünf nicht unterscheidbare Kätzchen. Wenn Sie aufgeschreckt werden, sucht sich jedes einen Platz unter einem der acht Esszimmerstühle. Wie viele unterschiedliche Verteilungen der fünf Kätzchen auf die Esszimmerstühle sind möglich?

Aufgabe 4: Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- (a) Ein Autohaus verkauft Autos, von denen
- 60 % eine Klimaanlage,
 - 20 % Ledersitze und
 - 30 % keins von beidem eingebaut haben.

Welcher Anteil der Autos wird mit Ledersitzen und Klimaanlage verkauft?

- (b) Eine Umfrage ergab folgendes Ergebnis:
- 40 % der Schüler lernen Spanisch.
 - 60 % der Schüler lernen Französisch.
 - 55 % der Schüler lernen Englisch.
 - 30 % der Schüler lernen Spanisch und Französisch.
 - 20 % der Schüler lernen Spanisch und Englisch.
 - 35 % der Schüler lernen Französisch und Englisch.
 - 10 % der Schüler lernen Spanisch, Französisch und Englisch.

Wie groß ist der Prozentsatz der Schüler, die überhaupt keine Fremdsprache lernen?

- (c) Im DHBW-Jahrgang 2012, bestehend aus 144 Studenten, haben 67 eine Studienarbeit bei einem hauptamtlichen Dozenten belegt, 111 bearbeiten im Team das gleiche Thema und 62 bearbeiten im Team das gleiche Thema bei einem hauptamtlichen Dozenten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem zufällig ausgewählten Studenten dafür,
- (i) dass er bei einem hauptamtlichen Dozenten oder in einem Team ist?
 - (ii) dass er weder bei einem hauptamtlichen Dozenten noch in einem Team ist?
 - (iii) dass er in einem Team, aber nicht bei einem hauptamtlichen Dozenten ist?

Aufgabe 5: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- (a) Mit einem (hypotetischen) Terrorismus-Test-Verfahren lässt sich auf Grund aller vorliegenden Daten mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % bestimmen, ob jemand ein potenzieller Terrorist ist. In einem halben Prozent der Fälle liefert der Test aber auch bei einer unbescholtenen Person ein positives Ergebnis. In Deutschland leben 80 Millionen Menschen. Gehen wir davon aus, dass es 400 potenzielle Terroristen in Deutschland gibt und eine Person wird vom Test als potenzieller Terrorist klassifiziert, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich einer der potenziellen Terroristen gefunden wurde?
- (b) Eine Produktionsanlage stellt Mikrochips her, wobei 15 % der Chips fehlerhaft sind. Ein Prüfgerät prüft alle hergestellten Chips.
- Das Prüfgerät sondiert 98 % aller fehlerhaften Chips aus.
 - Das Prüfgerät sondiert allerdings auch 6 % aller einwandfreien Chips aus
- (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Chip aussondiert wird?
- (ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aussondierter Chip defekt ist?

Aufgabe 6: Zufallsvariablen

- (a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen x ist durch folgende Tabelle gegeben:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0.1	0.5	$p(1)$	0.1

Bestimmen Sie folgende Größen;

$$f(1) = p(1) \quad P(X = 1.5) \quad P(X \leq 1.5) \quad P(0 \leq X \leq 1.5)$$

- (b) Eine stetige Zufallsvariable besitzt die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } 1 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter b durch Normierung und folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq 1.5) \quad P(1.5 \leq X \leq 2) \quad P(X \geq 2) \quad P(X \geq 3) \quad P(0 \leq X \leq 2.5)$$

- (c) Eine stetige Zufallsvariable besitzt die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} k \left(x - \frac{x^3}{4} \right) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter k durch Normierung.