1 Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zufallsvariablen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 16. März 2016, 11:21

Aufgabe 1: Reviewfragen

(a) Wie unterscheiden sich Elementarereignisse ω_i von Ereignissen A_j?

(b) Unter welcher Voraussetzung gilt $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

(c) Unter welcher Voraussetzung gilt $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$?

(d) Unter welcher Voraussetzung gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$?

(e) Warum gilt für eine stetige Zufallvariable X $P(X = x) = 0$?

Aufgabe 2: Laplace-Wahrscheinlichkeit

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Wahrscheinlichkeit die Chance, bei einem Wurf mit drei unabhängigen Laplace-Würfeln drei gleiche Augenzahlen, zu würfeln.

(b) In einer fünfstelligen Zahl kommt jede Ziffer nur einmal vor. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl (i) gerade, (ii) durch 5 teilbar?

(c) Eine Familie hat sechs Kinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind

  (i) die ersten zwei Kinder Söhne,

  (ii) nur die ersten zwei Kinder Söhne,

  (iii) genau zwei Kinder Söhne,

  (iv) mindestens zwei Kinder Söhne

wenn die Wahrscheinlichkeit für Sohn und Tochter gleich sind?

Aufgabe 3: Urnenmodell

(a) Auf wie viele Arten lassen sich 5 Hotelgäste in 15 freien Einzelbettzimmern unterbringen?

(b) Für das Elfmeterschießen muss der Trainer 5 von 11 Spielern auf dem Platz benennen. Wie viele Möglichkeiten hat er bei der Bestimmung der Kandidaten?

(c) Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \quad \text{für alle } n, k \geq 1$$

(d) Beim Fußball-Toto kann bei jedem der dreizehn Spiele eine 0 (unentschieden), eine 1 (Heimmannschaft gewinnt) oder eine 2 (Gastmannschaft gewinnt) angekreuzt werden. Wie viele verschiedene Tippmöglichkeiten gibt es?

(e) Ein Katzenbesitzer hat fünf nicht unterscheidbare Kätzchen. Wenn Sie aufgeschreckt werden, sucht sich jedes einen Platz unter einem der acht Esszimmerstühle. Wie viele unterschiedliche Verteilungen der fünf Kätzchen auf die Esszimmerstühle sind möglich?

Aufgabe 4: Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

(a) Ein Autohaus verkauft Autos, von denen

- 60 % eine Klimaanlage,
- 20 % Ledersitze und
- 30 % keins von beidem eingebaut haben.

Welcher Anteil der Autos wird mit Ledersitzen und Klimaanlage verkauft?

(b) Eine Umfrage ergab folgendes Ergebnis:

- 40 % der Schüler lernen Spanisch.
- 60 % der Schüler lernen Französisch.
- 55 % der Schüler lernen Englisch.
- 30 % der Schüler lernen Spanisch und Französisch.
- 20 % der Schüler lernen Spanisch und Englisch.
- 35 % der Schüler lernen Französisch und Englisch.
- 10 % der Schüler lernen Spanisch, Französisch und Englisch.

Wie groß ist der Prozentsatz der Schüler, die überhaupt keine Fremdsprache lernen?

(c) Im DHBW-Jahrgang 2012, bestehend aus 144 Studenten, haben 67 eine Studienarbeit bei einem hauptamtlichen Dozenten belegt, 111 bearbeiten im Team das gleiche Thema und 62 bearbeiten im Team das gleiche Thema bei einem hauptamtlichen Dozenten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem zufällig ausgewählten Studenten dafür,

(i) dass er bei einem hauptamtlichen Dozenten oder in einem Team ist?

(ii) dass er weder bei einem hauptamtlichen Dozenten noch in einem Team ist?

(iii) dass er in einem Team, aber nicht bei einem hauptamtlichen Dozenten ist?

Aufgabe 5: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

(a) Mit einem (hypotetischen) Terrorismus-Test-Verfahren lässt sich auf Grund aller vorliegenden Daten mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % bestimmen, ob jemand ein potenzieller Terrorist ist. In einem halben Prozent der Fälle liefert der Test aber auch bei einer unbescholtenen Person ein positives Ergebnis. In Deutschland leben 80 Millionen Menschen. Gehen wir davon aus, dass es 400 potenzielle Terroristen in Deutschland gibt und eine Person wird vom Test als potenzieller Terrorist klassifiziert, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich einer der potenziellen Terroristen gefunden wurde?

(b) Eine Produktionsanlage stellt Mikrochips her, wobei 15 % der Chips fehlerhaft sind. Ein Prüfgerät prüft alle hergestellten Chips.

- Das Prüfgerät sondiert 98 % aller fehlerhaften Chips aus.
- Das Prüfgerät sondiert allerdings auch 6 % aller einwandfreien Chips aus

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Chip aussondiert wird?

(ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aussondierter Chip defekt ist?

Aufgabe 6: Zufallsvariablen

(a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen x ist durch folgende Tabelle gegeben:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0.1	0.5	$p(1)$	0.1

Bestimmen Sie folgende Größen;

$$f(1) = p(1) \quad P(X = 1.5) \quad P(X \leq 1.5) \quad P(0 \leq X \leq 1.5)$$

(b) Eine stetige Zufallsvariable besitzt die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } 1 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter b durch Normierung und folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq 1.5) \quad P(1.5 \leq X \leq 2) \quad P(X \geq 2) \quad P(X \geq 3) \quad P(0 \leq X \leq 2.5)$$

(c) Eine stetige Zufallsvariable besitzt die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} k\left(x - \frac{x^3}{4}\right) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter k durch Normierung.

1 Lösungen

Lösung Aufgabe 1:

Lösung Aufgabe 2:

(a) Die Anzahl der möglichen Würfe ist $|\Omega| = 6^3 = 216$. Anzahl der günstigen Fälle für das Ereignis $A = 6$, $P(A) = \dfrac{6}{216} = 0.03$

(b) $|\Omega| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$ (erste Ziffer immer ungleich Null).

(i) Mit den Ereignissen A_1 : letzte Ziffer gleich Null, A_2 : letzte Ziffer gerade, gilt

$$P = (A_1 \cup A_2) = \frac{|A_1| + |A_2|}{|\Omega|} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4}{27\,216} = 0.5062$$

(ii) Mit den Ereignissen A_1 : letzte Ziffer gleich Null, A_3 : letzte Ziffer gleich fünf , gilt

$$P = (A_1 \cup A_2) = \frac{|A_1| + |A_2|}{|\Omega|} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1}{27\,216} = 0.2099$$

(c) $|\Omega| = 2^6$

(i) $\dfrac{1 \cdot 1 \cdot 2^4}{2^6} = 0.25$ (ii) $\dfrac{1^6}{2^6} = 0.0156$ (iii) $\dfrac{\binom{6}{2}}{2^6} = \dfrac{15}{64} = 0.2344$ (iv) $1 - \dfrac{\binom{6}{0} + \binom{6}{1}}{2^6} = 1 - \dfrac{7}{64} = 0.8906$

Lösung Aufgabe 3:

(a) Variation ohne Wiederholung mit $n = 15$ und $k = 5$:

$$V(15, 5) = \frac{15!}{(15-5)!} = 360360$$

(b) Kombination ohne Wiederholung mit $n = 11$ und $k = 5$:

$$C(11, 5) = \binom{11}{5} = \frac{11!}{(11-5)! \bullet 5!} = 462$$

(c)

$$\begin{aligned}
k \cdot \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \\
&= k \frac{n\,(n-1)!}{(n-k)!\; k\,(k-1)!} \\
&= n \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!\;(k-1)!} \\
&= n \frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(k-1)\big)!\;(k-1)!} \\
&= n \cdot \binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

(d) Variation mit Wiederholung mit $n = 3$ und $k = 13$:

$$V_{\mathrm{w}} = 3^{13} = 1\,594\,323$$

(e) Kombination mit Wiederholung mit $n = 8$ und $k = 5$:

$$C_{\mathrm{w}}(8,5) = \binom{8+5-1}{5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{(12-5)! \bullet 5!} = 792$$

Lösung Aufgabe 4:

(a) Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

a) K: Menge der Autos mit Klimaanlage.

b) L: Menge der Autos mit Ledersitzen.

c) N: Menge der Autos, die weder eine Klimaanlage noch Ledersitze eingebaut hat.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
P(N) &= 1 - P(K \cup L) \\
&= 1 - \big(P(K) + P(L) - P(K \cap L)\big) \\
&= 1 - P(K) - P(L) + P(K \cap L) \\
\Rightarrow P(K \cap L) &= P(N) + P(K) + P(L) - 1 \\
&= 0.3 + 0.6 + 0.2 - 1 \\
&= 0.1
\end{aligned}$$

10 % der Autos werden mit Klimaanlage und Ledersitzen verkauft.

(b) Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

a) S: Menge der Schüler, die Spanisch lernt.

b) F: Menge der Schüler, die Französisch lernt.

c) E: Menge der Schüler, die Englisch lernt.

d) K: Menge der Schüler, die keine Fremdsprache lernt.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
P(K) &= P(\overline{S \cup F \cup E}) \\
&= 1 - P(S \cup F \cup E) \\
&= 1 - (P(S) + P(F) + P(E) - P(S \cap F) - P(S \cap E) - P(F \cap E) + P(S \cap F \cap E)) \\
&= 1 - (0.4 + 0.6 + 0.55 - 0.3 - 0.2 - 0.35 + 0.1) \\
&= 0.2
\end{aligned}$$

Es lernen 20 % der Schüler überhaupt keine Fremdsprache.

(c) Wir definieren die Ereignisse D: Student ist bei einem hauptamtlichen Dozent, T: Student arbeite im Team.

(i) Rechenregel Nr. 5, Additionssatz:

$$P(D \cup T) = P(D) + P(T) - P(D \cap T) = \frac{67}{144} + \frac{111}{144} - \frac{62}{144} = 0.8056$$

(ii) Rechenregel Nr. 4, Inversion:

$$P(\overline{D \cup T}) = 1 - P(D \cup T) = 1 - 0.8056 = 0.1944$$

(iii) Mit Rechenregel Nr. 6 folgt

$$P(T \cap \bar{D}) = P(T) - P(T \cap D) = \frac{111}{144} - \frac{62}{144} = 0.3403$$

Lösung Aufgabe 5:

(a) Mit B_1 bezeichnen wir das Erreignis, dass jemand potenzieller Terrorist ist und mit B_2 das dazu komplementäre Ereignis. Weiterhin sei A das Ereignis, dass der Test jemanden als potenziellen Terrorist klassifiziert. Es gilt dann

$$P(B_1) = \frac{400}{80 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-6}, \quad P(B_2) = 1 - 5 \cdot 10^{-6} \quad P(A|B_1) = 0.99 \text{ und } P(A|B_2) = 0.005$$

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B_1|A)$. Nach der Formel von Bayes gilt

$$\begin{aligned}
P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)} \\
&= \frac{0.99 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{0.99 \cdot 5 \cdot 10^{-6} + 0.005 \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-6})} \\
&\approx 0.00099
\end{aligned}$$

Damit liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass tatsächlich ein Terrorist entdeckt wurde, unter 0.1 %.

(b) Mit A bezeichnen wir das Ereignis, dass ein Chip fehlerhaft ist. B sei das Ereignis, dass das Prüfgerät einen Chip als fehlerhaft erkennt.

(i) Dann gilt mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \bullet P(A) + P(B|\bar{A}) \bullet B(\bar{A}) \\ &= 0.98 \bullet 0.15 + 0.06 \bullet 0.85 \\ &= 0.198 \end{aligned}$$

(ii) Gesucht ist $P(A|B)$, das heißt umkehren von Argument und Bedingung $\Leftrightarrow$ Satz von Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A) \bullet P(A)}{P(B|A) \bullet P(A) + P(B|\bar{A}) \bullet B(\bar{A})} \\ &= \frac{0.98 \bullet 0.15}{0.98 \bullet 0.15 + 0.06 \bullet 0.85} \\ &= 0.742 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 6:

(a)

$$\begin{aligned} &f(1) = 1 - 0.1 - 0.5 - 0.1 = 0.3 \\ &P(X = 1.5) = f(1.5) = 0 \\ &P(X \leq 1.5) = f(-1) + f(0) + f(1) = 0.9 \\ &P(0 \leq X \leq 1.5) = f(0) + f(1) = 0.8 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \ln b - \ln 1 = \ln b = 1 \\ &\Rightarrow b = \mathrm{e} \approx 2.7183 \\ &P(X \leq 1.5) = \ln 1.5 \approx 0.4055 \\ &P(1.5 \leq X \leq 2) = \ln 2 - \ln 1.5 \approx 0.2877 \\ &P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \ln 2 \approx 0.3069 \\ &P(X \geq 3) = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{2} k \left(x - \frac{x^3}{4}\right) \mathrm{d}x \\ &= k \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right]_0^2 \\ &= k \overset{!}{=} 1 \\ \Leftrightarrow k &= 1 \end{aligned}$$