1 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zufallsvariablen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 18. Mai 2015, 09:29

Die nummerierten Felder bitte während der Vorlesung ausfüllen.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieses und die folgenden Skripte basieren auf dem Foliensatz zum Buch [BBK12] sowie auf [Pap11]. Für die Vorlesung benötigen Sie nur [Pap11], das Sie als eBook aus dem Netz der DHBW-Stuttgart kostenlos herunterladen können.

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung[1]

2.1 Zufallsvorgänge

Zufallsvorgang

1 Geschehen mit ungewissem Ausgang, z.B. Münzwurf

Elementarereignis ω

2 Ein möglicher Ausgang, z.B. „Kopf“

3 Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus „Kopf“ XOR „Zahl“

Ergebnismenge Ω

4 Menge aller Elementarereignisse

Ergebnis

5 Tatsächlich eingetretenes Elementarereignis

Beispiel: Werfen zweier Würfel

6 $\Omega = \Big\{(x_1, x_2) \colon x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 6\}\Big\}$

2.2 Ereignisse und ihre Darstellung

Ereignis A

7 Folgeerscheinung eines Ergebnisses, $A \subset \Omega$

8 Ereignisse schließen sich *nicht* gegenseitig aus

[1] [Pap11, Teil II, Kapitel 1 bis 3]

Beispiel: Werfen zweier Würfel

Ereignis	verbal	formal
A	Augensumme $= 4$	9 $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$
B	Erste Zahl $= 2$	10 $\{(2,1),(2,2),\dots,(2,6)\}$

Tabelle 1: Sprech-/Schreibweisen bei Bildung von Ereignissen

	Beschreibung des zugrundeliegenden Sachverhalts	Bezeichnung (Sprechweise)	Darstellung in Ω (Schreibweise als Teilmenge)
1.	A tritt sicher ein	A ist *sicheres* Ereignis	11 $A = \Omega$
2.	A tritt sicher nicht ein	A ist *unmögliches* Ereignis	12 $A = \emptyset$
3.	wenn A eintritt, tritt B ein	A ist *Teilereignis* von B	13 $A \subset B$
4.	genau dann, wenn A eintritt, tritt B ein	A und B sind *äquivalente* Ereignisse	14 $A = B$
5.	wenn A eintritt, tritt B nicht ein	A und B sind *disjunkte* Ereignisse	15 $A \cap B = \emptyset$
6.	genau dann, wenn A eintritt, tritt B nicht ein	A und B sind *komplementäre* Ereignisse	16 $B = \bar{A}$
7.	genau dann, wenn *mindestens ein* A_j eintritt (auch: genau dann, wenn A_1 *oder* A_2 oder ... eintritt), tritt A ein	A ist *Vereinigung* der A_j	17 $A = \bigcup_j A_j$
8.	genau dann, wenn *alle* A_j eintreten (auch: genau dann, wenn A_1 *und* A_2 *und* ... eintreten)	A ist *Durchschnitt* der A_j	18 $A = \bigcap_j A_j$

2.3 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Wahrscheinlichkeit $P(A)$

19 Chance für das Eintreten von A

Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

20
1. $P(A) \geqq 0$ für alle A

21
2. $P(\Omega) = 1$

22
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$, falls alle A_j disjunkt

Laplace-Wahrscheinlichkeit

23

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

24
Voraussetzung: Alle $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich

Beispiel: Werfen zweier Würfel, Augensumme gleich vier: $A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

25
$|\Omega| = 36, |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0.083$

Urnenmodell: Ziehe k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten ([Pap11, Tabelle 1, Seite 264])

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung	
Kombinationen k-ter Ordnung	26 $C(n,k) = \binom{n}{k}$	27 $C_{\mathrm{w}}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$	ungeordnete Stichproben
Variationen k-ter Ordnung	28 $V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	29 $V_{\mathrm{w}}(n,k) = n^k$	geordnete Stichproben
	Ziehung ohne Zurücklegen	Ziehung mit Zurücklegen	

Beispiel: Parallelschaltung von vier Widerständen, wobei insgesamt 6 verschiedene Widerstände $R_1, R_2, \ldots, R_6$ zur Verfügung stehen. Wie viele *verschiedene* Schaltmöglichkeiten gibt es, wenn jeder der 6 Widerstände a) höchstens einmal und b) mehrmals, also bis zu viermal verwendet werden darf? ([Pap11, Seite 259])

30

a) Kombination ohne Wiederholung, $n = 6,\ k = 4$ $\qquad C(6,4) = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$

31

b) Kombination mit Wiederholung, $n = 6,\ k = 4$ $\qquad C_{\mathrm{w}}(6,4) = \binom{9}{4} \frac{9!}{4!5!} = 126$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

32

1. $P(a) \leqq 1$

33

2. $P(\emptyset) = 0$

34

3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$

35

4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

36

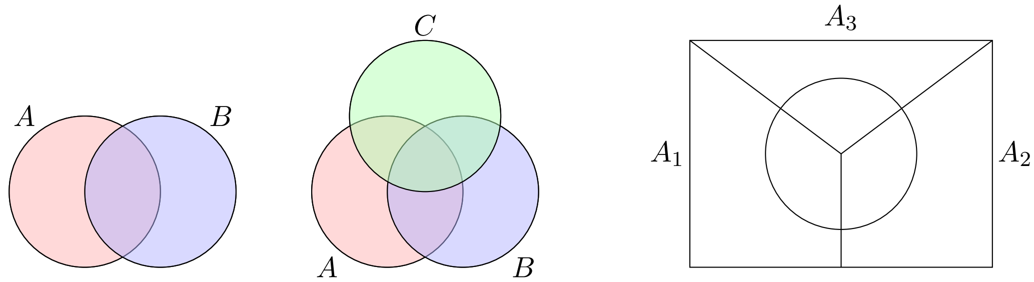
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

37

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$
$+ P(A \cap B \cap C)$

38

6. $P(B) = \sum_i P(B \cap A_i)$, falls alle A_j disjunkt und $\bigcup_j A_j = \Omega$



Beispiel: Einmaliges Würfeln

$$P(A) = P(\text{„Augenzahl} \geqq 5\text{“})$$

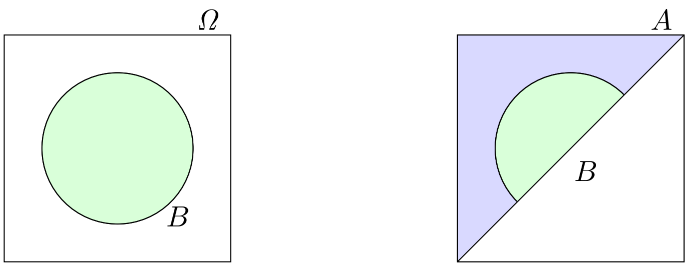
39
$$= 1 - P(\bar{A})$$

40
$$= 1 - P(\text{„Augenzahl} = 6\text{“})$$

41
$$= 1 - 1/6 = 5/6$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit B hängt von Ereignis A ab.
- Formal: 42 $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
- Im Mengendiagramm:

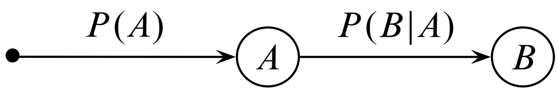


43 $P(B) = \dfrac{\text{Kreis}}{\text{Quadrat}}$

44 $P(B|A) = \dfrac{\text{Halbkreis}}{\text{Dreieck}}$

Baumdiagramm

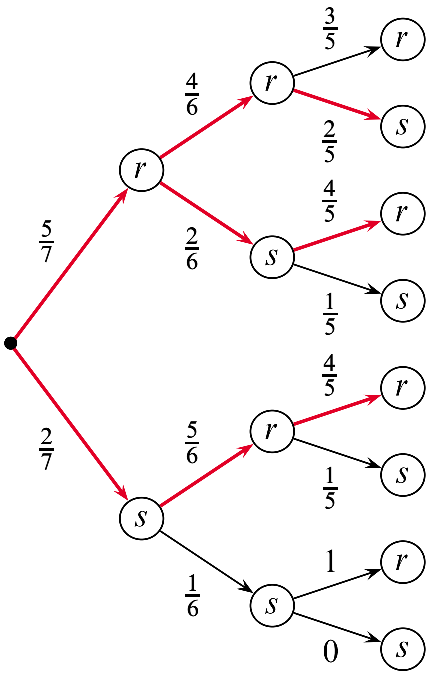
45



$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Beispiel: Urnenmodell, 5 rote, 2 schwarze Kugeln, 3-mal Ziehen ohne Zurücklegen.

46



$$P(r,r,r) = \tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{3}{5} = \tfrac{2}{7}$$

$$\begin{aligned} P(\text{„}2{\times}r,\ 1{\times}s\text{“}) &= P(r,r,s)+P(r,s,r)+P(s,r,r) \\ &= \tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{4}{5}+\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{4}{5} \\ &= \tfrac{4}{7} \approx 0{,}571 \end{aligned}$$

Totale Wahrscheinlichkeit: Unbedingte aus bedingten Wahrscheinlichkeiten erschließen. Aus Lücke 38 und 42 folgt:

47

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B|A_i)\cdot P(A_i)$$

Formel von Bayes: Umkehren von Argument und Bedingung.

48

$$P(A_j \cap B) = P(B \cap A_j)$$

Lücke 42: $\Rightarrow$ $$P(A_j|B)\cdot P(B) = P(B|A_j)\cdot P(A_j)$$

Lücke 47 $\Rightarrow$ $$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\cdot P(A_j)}{\sum_i P(B|A_i)\cdot P(A_i)}$$

Unabhängigkeit von Ereignissen: A, B unabhängig: Das Eintreten von A ist *nicht* informativ bezüglich $P(B)$ und umgekehrt.

- Formal: 49 $P(B|A) = P(B)$
- Äquivalent zu: 50 $P(B \cap A) = P(B)\cdot P(A)$

- Dann gilt: 51 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

- Beispiel: Zwei Würfel unabhängig werfen.

$$\left.\begin{array}{ll} A: & \text{„erster Würfel gleich 6“} \\ B: & \text{„zweiter Würfel gleich 6“} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

52 $$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

2.4 Übungsaufgaben

[Pap11, Teil II, Zu Abschnitt 1 bis 3, Seite 451ff]

3 Zufallsvariablen[2]

- Beschreibung von Ereignissen durch reelle Zahlen.

  Formal: 53 Ergebnismenge $\Omega \to \mathbb{R}$, d.h. $\omega \in \Omega \to X(\omega)$

- **Vor** Durchführung des Zufallsvorgangs:

  Zufallsvariable oder Wertebereich: 54 X

- **Nach** Durchführung des Zufallsvorgangs:

  Wert oder Realisation: 55 x

- **Beispiel:** Würfeln mit Farbwürfel mit der Ergebnismenge

  $$\Omega = \{\mathit{blau,\ grün,\ lila,\ rot,\ schwarz,\ weiß}\}$$

  Wir ordnen jeder Farbe eine (sinnvolle) reelle Zahl zu, zum Beispiel $b = 0$, $g = 1$, ...
  somit ist der Wertebereich = 56 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

57 $$P(X = 0) = \frac{1}{6}, \quad P(X \leqq 3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3.1 Diskrete Zufallsvariablen

- X heißt *diskret,* falls ihr Wertebereich 58 endlich ist.

[2] [Pap11, Teil II, Kapitel 4]

- Dann ist $P(X = x)$ *nicht* konstant 0

- Die Funktion

$$f(x) = P(X = x)$$

heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion* oder einfache Wahrscheinlichkeit.

- Für die Verteilungsfunktion gilt dann:

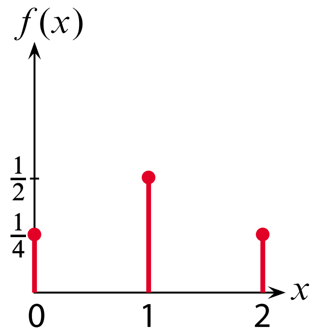
$$F(x) = P(X \leqq x) = \sum_{x_i \leqq x} f(x_i)$$

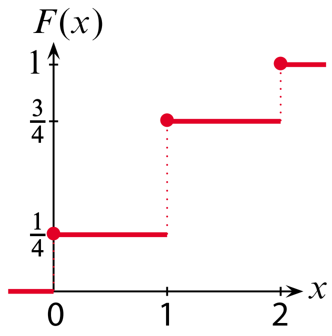
Die Verteilungsfunktion heißt daher auch kumulierte Wahrscheinlichkeit.

- Beispiel: Münze 2 mal werfen, X: Anzahl „Kopf“

	(Z, Z)	(Z,K), (K,Z)	(K,K)
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{falls } 1 \leqq x < 2 \\ 1, & \text{falls } x \geqq 2 \end{cases}$$





3.2 Stetige Zufallsvariablen

- X heißt *stetig*, falls $F(x)$ stetig ist.

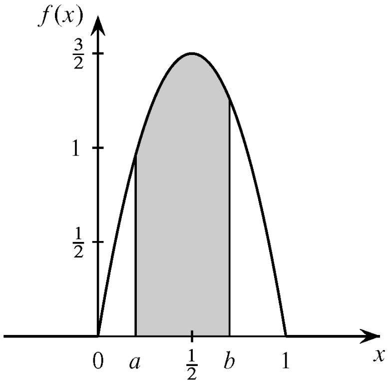
68

- Dann gilt: $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- $F'(x) = f(x)$ heißt *Dichtefunktion* von X.
- Zudem gilt:

69

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leqq X < b) \\ &= P(a < X \leqq b) \\ &= P(a \leqq X \leqq b) \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$



3.2.1 Eigenschaften

70

- $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

71

- Wegen $F(\infty) = 1$ muss stets gelten: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

72

- $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

73

- $F'(x) = f(x)$

- Intervallgrenzen spielen keine Rolle:

74

$$\begin{aligned} P(X \in [a,b]) &= P(X \in (a,b]) = P(X \in [a,b)) = P(X \in (a,b)) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

3.2.2 Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq 10 \\ 0, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

- Verteilungsfunktion:

75

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{10}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{10}\right]_0^x = \frac{x}{10} \Rightarrow$$

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{x}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq 10 \\ 1\,, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(2 \leqq X \leqq 6) = F(6) - F(2) = \tfrac{6}{10} - \tfrac{2}{10} = 0{,}4$$

3.3 Übungsaufgaben

[Pap11, Teil II, Zu Abschnitt 4, Seite 457ff]

Literatur

[BBK12] Günter Bamberg, Franz Baur und Michael Krapp. *Statistik*. 17. Auflage. Oldenbourg Verlag, 2012.

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.