7 Übungen zu Signifikanztests Teil 1

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 21. Mai 2015, 14:04

Aufgabe 1: Reviewfragen

(a) Wenn man einen Sachverhalt „statistisch belegen" möchte, formuliert man ihn dann als Hypothese H_0 oder als Gegenhypothese H_1?

(b) Wie unterscheiden sich Einstichproben-Gaußtest / -t-Test / approximativer Gaußtest?

(c) Falls man H_0 möglichst widerlegen möchte, wählt man dann eher das Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ oder $\alpha = 0.2$?

Aufgabe 2:

Ein Badesee ist in Verdacht geraten, ein bestimmter Schadstoffgehalt in ihm könnte oberhalb eines vorgegebenen Grenzwertes liegen. In einer einfachen Stichprobe wird der Schadstoffgehalt X (gemessen in Milligramm pro Kubikmeter) beobachtet. Sechs Messungen im See liefern die Werte

2.3   1.8   2.6   1.4   2.1   1.5

Lässt sich hiermit zum Signifikanzniveau 10 % statistisch bestätigen, dass der Erwartungswert X über dem Grenzwert von 1.8 (Milligramm pro Kubikmeter) liegt, wenn X als normalverteilt mit der Standardabweichung 0.4 angenommen werden darf?

Aufgabe 3:

Ein Lebensmittelhersteller bringt Raviolidosen auf den Markt, in denen sich laut Aufdruck jeweils 500 Gramm Ravioli befinden sollten. Aus der gesamten Produktionsserie solcher Dosen wurde eine einfache Stichprobe vom Umfang 8 gezogen. Für den Inhalt ergaben sich folgende Werte (in Gramm):

484   486   472   519   497   487   495   480

Die Daten können als Realisierungen normalverteilter Zufallsvariablen angesehen werden. Kann die Hypothese, dass die Dosen im Erwartungswert weniger als 500 Gramm beinhalten, zum Signifikanzniveau 2.5 % statistisch bestätigt werden?

Aufgabe 4:

Ein Elektriker optimiert den Stromverbrauch in einem Haus mit verschiedenen Maßnahmen. Er erstattet dem Hausbesitzer die Hälfte der Kosten, wenn zu einem Signifikanzniveau von 5 % mittels eines Hypothesentests nicht statistisch bestätigt werden kann, dass sich der Erwartungswert des täglichen Stromverbrauchs gegenüber vorher reduziert hat. Der Erwartungswert des vorherigen täglichen Stromverbrauchs lag bei 10 kWh. Der Hausbesitzer notiert an 50 zufällig ausgewählten Tagen den Stromverbrauch. Die Messungen ergaben folgende Werte (gemessen in kWh):

Verbrauch	9.5	9.7	9.9	10.0	10.2
Häufigkeit	10	10	10	10	10

Klären Sie die Frage, ob der Hausbesitzer die Erstattung erhält.

Aufgabe 5:

In einem Spielkasino werden Zweifel geäußert, dass ein bestimmter Würfel fair ist, das heißt alle Zahlen gleich häufig auftreten. Bei 120 Probewürfen erschienen die Zahlen 1 bis 6 mit folgenden Häufigkeiten:

Zahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	21	27	20	24	15	13

Testen Sie H_0 zu den Signifikanzniveaus 1 %, 5 %, 40 %

Aufgabe 6:

$X_1, \ldots, X_{31}$ beschreibe eine einfache Stichprobe aus einer beliebig verteilten Grundgesamtheit. Aus den Ergebnissen wurden $\bar{x} = 9$ und $s^2 = \frac{31}{4}$ errechnet. Testen Sie die Hypothese $H_0 : \mu = 8$ gegen $H_1 : \mu \neq 8$ zum Signifikanzniveau 0.05.

Aufgabe 7:

Ein Arbeiter braucht für die Bearbeitung eines Werkstücks im Durchschnitt 7 Minuten. Ein Berater des Unternehmens schlägt, um eine Zeitersparnis zu erreichen, eine andere Bearbeitungsart vor und will die Effektivität seines Vorschlags mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang $n = 16$ testen. Die Stichprobe liefert die empirischen Kennwerte $\bar{x} = 408\,\text{s}$ und $s = 25.7\,\text{s}$. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Grundgesamtheit normalverteilt ist. Überprüfen Sie mit $\alpha = 0.05$ und mit $\alpha = 0.01$, ob eine signifikante Zeiteinsparung erreicht worden ist.

Aufgabe 8:

Aus der laufenden Produktion werden $n = 100$ Teile zufällig entnommen und geprüft. Es stellt sich heraus, dass in der Stichprobe acht defekte Teile sind. Prüfen Sie mit $\alpha = 0.05$, ob es sein kann, dass der Ausschussanteil in der Gesamtproduktion 5 % nicht übersteigt.

Lösung 1:

(a) Gegenhypothese.

(b) EinstichprobenGaußtest: $G \sim N(\mu, \sigma)$, σ bekannt
Einstichproben$t$-Test: $G \sim N(\mu, \sigma)$, σ unbekannt
Eintichproben approximativer Gaußtest: beliebige / dichotome Verteilung mit $n > 30$ / $5 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n-5$
Testfunktionswerte werden jeweils unterschiedlich berechnet.

Lösung 2:

Gaußtest, $H_1 : \mu > \mu_0$: $v = 0.919$, $B = (1.282, \infty)$ $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Lösung 3:

Einstichproben-t-Test, $H_1 : \mu < \mu_0$: $v = -2$ $B = (-\infty, -2.365) v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Lösung 4:

$H_0 : \mu = 100$ gegen $H_1 : \mu < 100$ Approximativer Gaußtest, Fall b), $v = -4.0553$, $B = (-\infty, -1.645)$, $v \in B \Rightarrow H_0$ verwerfen. Der Hausbesitzer erhält also keine Erstattung.

Lösung 5:

Approximativer Gaußtest, Fall (a), $H_1 : \mu \neq \mu_0$,$v = -2.045$,

$$\begin{array}{rll} \alpha = 0.01: & v \notin B = (-\infty, -2.58) \cup (2.58, \infty) & \Rightarrow \text{fair} \\ \alpha = 0.05: & v \in B = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty) & \Rightarrow \text{unfair} \\ \alpha = 0.4: & v \in B = (-\infty, -0.8416) \cup (0.8416, \infty) & \Rightarrow \text{unfair} \end{array}$$

Lösung 6:

$v = 2 \in B = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty) \Rightarrow H_0$ verwerfen

Lösung 7:

$H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$, $v = -1.868$,

$$\begin{array}{llll} \alpha = 0.05: & v \in B = (-\infty, -1.75) & \Rightarrow H_0 \text{ verwerfen,} & \Rightarrow \text{Zeitersparnis} \\ \alpha = 0.01: & v \notin B = (-\infty, -2.60) & \Rightarrow H_0 \text{ nicht verwerfen} & \Rightarrow \text{keine Zeitersparnis} \end{array}$$

Lösung 8:

$G \sim B(1, 0.05)$, $5 \leq 8 \leq 100 - 5 \Rightarrow$ approximativer Gaußtest mit $H_0 : p \leq 0.05$, $H_1 : p > 0.05$

1. $\alpha = 0.05$
2. $v = \dfrac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \dfrac{0.08 - 0.05}{\sqrt{0.05 \cdot 0.95}} \cdot 10 = 1.377$
3. $N(0,1) : x_{1-\alpha} = x_{0.95} = 1.6449 \Rightarrow B = (1.6449, \infty)$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ beibehalten