6 Übungen zur Intervallschätzung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 20. Mai 2015, 10:54

Aufgabe 1: Reviewfragen

(a) Wozu dient die Intervallschätzung?

(b) Wie hängen Irrtumswahrscheinlichkeit α und das Konfidenzniveau zusammen?

(c) Warum wird das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Fraktil und *nicht* das $(1-\alpha)$-Fraktil bestimmt, wenn das Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung geschätzt werden soll?

(d) Was bedeutet hier *dichotom*?

(e) Was ist die Voraussetzung, wenn das Konfidenzintervall für μ bei beliebiger / dichotomer Verteilung geschätzt werden soll?

(f) Falls die Verteilung beliebig, nicht dichotom und die Standardabweichung σ unbekannt ist, in welchen Fällen kann eine andere Schätzfunktion als die Stichproben-Standardabweichung S für $\hat{\sigma}$ sinnvoll sein?

Aufgabe 2:

Eine Stichprobe $(x_1, \ldots, x_{30})$ vom Umfang $n = 30$ aus einer normalverteilten Grundgesamtheit ergibt

$$\bar{x} = 1\,500 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 20\,000$$

(a) In welchem Interwall liegt „mit 95 %-iger Sicherheit" der Erwartungswert μ?

(b) Zu welchem Konfidenzniveau entsteht ein Schätzintervall für μ der Form $\begin{bmatrix}1\,460 & 1\,540\end{bmatrix}$?

(c) Bestimmen Sie das Schätzintervall für die Varianz zum Konfidenzniveau 0.95

Hinweis: Nutzen Sie die Tabellen der entsprechenden Verteilungen im Skript und interpolieren Sie gegebenenfalls.

Aufgabe 3:

Bei 120 Würfen mit einem Würfel erschienen die Zahlen 1 bis 6 mit folgenden Häufigkeiten:

Zahl a	1	2	3	4	5	6
$h(a)$	21	27	20	24	15	13

Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ ein Schätzintervall für den Erwartungswert der Augenzahl.

Aufgabe 4:

Die Füllmenge von Limonadeflaschen würde geprüft und es ergaben sich folgende Werte:

ccm	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
Anzahl	2	1	3	1	3	1	2	1	1	0	1

Nach Angaben des Abfüllers ist die Füllmenge normalverteilt mit einer Varianz von $\sigma^2 = 2.25$. Geben Sie ein Schätzintervall für den Erwartungswert μ zum Niveau $1 - \alpha = 0.94$ an und bestimmen Sie die Intervalllänge. Welcher Stichprobenumfang garantiert eine Länge von 1 für das Schätzintervall?

Aufgabe 5:

$X_1, \ldots, X_{31}$ beschreibe eine einfache Stichprobe aus einer beliebig verteilten Grundgesamtheit. Aus den Ergebnissen wurden $\bar{x} = 9$ und $s^2 = \dfrac{31}{4}$ errechnet. Bestimmen Sie zur Irrtumswahrscheinlichkeit 0.05

(a) ein Schätzintervall für den Erwartungswert

(b) ein Schätzintervall für die Varianz σ^2, unter der Annahme, dass die X_i normalverteilt sind,

Aufgabe 6:

In einer Fabrik wird der tägliche Stromverbrauch X bei konstanter Auslastung von Maschinen untersucht. Bei 200 gleichartigen Maschinen ergab sich die Stichprobenrealisation $x_1, \ldots, x_{200}$, von der bekannt ist:

$$\sum_{i=1}^{200} x_i = 2400 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{200} x_i^2 = 30929$$

(a) Bestimmen Sie das Schätzintervall für den Verbrauch μ mit einem Konfidenzniveau von 95 %.

(b) Es sei gesichert, dass für die Standardabweichung σ von X sowie alle denkbaren Realisationen der Stichproben-Standardabweichung höchstens 4 betragen. Ab welchem Stichprobenumfang n ist gesichert, dass die Länge des Schätzintervalls zum Konfidenzniveau 99 % höchstens 0.9 beträgt?

Aufgabe 7:

Bislang musste an Postschaltern im Mittel 3 Minuten gewartet werden. Eine für alle Postfilialen erwogene Software-Unterstützung wird vor der generellen Installation per Stichprobe untersucht. Bei 200 Kunden ergaben sich die Dauern $x_1, \ldots, x_{200}$ mit $\bar{x} = 2.5$ und $s = 2.15$.

(a) Bestimmen Sie zu einem Konfidenzniveau von 95 % ein Schätzintervall für die erwartete Dauer nach Installation.

(b) Wie groß muss das Konfidenzniveau gewählt werden, damit die obere Grenze des Schätzintervalls gerade 3 beträgt?

Aufgabe 8:

Aus der Grundgesamtheit der Studenten wurden 100 zufällig (mit Zurücklegen) ausgewählt und befragt, ob sie rauchen. Dabei antworteten 36 mit *ja* und 64 mit *nein*.

(a) Bestimmen sie das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95 % für den Anteil der Raucher in der vorliegenden Grundgesamtheit.

(b) Welcher Stichprobenumfang würde bei gleichem Konfidenzniveau von 95 % gewährleisten, dass die Länge des Konfidenzintervalls 0.14 ist?

Aufgabe 9:

Ein Anbieter von Online-Computerspielen hat bei 100 zufällig ausgewählten Nutzern eine Woche lang protokoliert, wie lange sie spielten. Aus den in Minuten gemessenen Spieldauern $x_1, \ldots, x_{100}$, die als Realisierungen normalverteilter Stichprobenvariablen angesehen werden können, wurden die Werte

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 21840 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 4\,868\,856$$

errechnet.

(a) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95 % für die Varianz der gemessenen Spieldauer.

(b) Was ergibt sich bei einer Punktschätzung mit einer *erwartungstreuen* Schätzfunktion für die Varianz?

Aufgabe 10:

Gegeben ist eine einfache Stichprobe vom Umfang 40 aus einer Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz. Aus dieser Stichprobe wurde für den Erwartungswert der Grundgesamtheit mit $\alpha = 0.05$ das symmetrische Konfidenzintervall $\left[297.03 \quad 352.97\right]$ ermittelt.

(a) Unterstellen Sie, dass die Grundgesamtheit Poisson-verteilt ist. Bestimmen Sie dann einen geeigneten Schätzwert des Verteilungsparameters der Poisson-Verteilung.

Nehmen Sie im Folgenden an, obiges Schätzintervall sei mit Daten aus einer normalverteilten Grundgesamtheit errechnet worden.

2. Geben Sie den *Maximum-Likelihood-Schätzwert* für die Standardabweichung an.
3. Bestimmen Sie zur Irrtumswahrscheinlichkeit 10 % ein Schätzintervall für die Varianz.

Aufgabe 11:

Eine Alkoholkontrolle bei Autofahrern lieferte 34 fahruntaugliche Fahrer mit folgenden Werten:

Blutalkohol ‰	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
Anzahl	11	9	6	4	2	2

Bestimmen Sie für ein Konfidenzniveau von 95 % das symmetrische Schätzintervall für den Erwartungswert des Blutalkoholgehalts eines fahruntauglichen Autofahrers.

Aufgabe 12:

Hans, Hobby-Statistiker, hat auf Basis der selben einfachen Stichprobe aus einer $B(1,p)$-verteilten Grundgesamtheit die folgenden beiden Schätzintervalle für den unbekannten Verteilungsparameter p bestimmt:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0.1342 & 0.2658 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0.1216 & 0.2784 \end{bmatrix}$$

Das Intervall I_2 hat Hans zum Konfidenzniveau 95 % berechnet.

(a) Zeigen Sie, dass I_1 und I_2 eine Stichprobe vom Umfang 100 zu Grunde liegt.

(b) Mit welchem Konfidenzniveau hat Hans das Schätzintervall I_1 bestimmt?

(c) Wie groß hätte Hans den Stichprobenumfang wählen müssen, so dass die Länge des 95 %-Konfidenzintervalls maximal die Länge von I_1 erreicht?

(d) Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzwert des Erwartungswerts der Grundgesamtheit?

Lösung 1:

(a) Schätzen eines Intervalls für ϑ auf Basis einer Stichprobe.

(b) Konfidenzniveau $= 1-\alpha$

(c) Weil die Normalverteilung symmetrisch ist.

(d) Zweiwertig, binär.

(e) beliebige Verteilung: $n > 30$, dichotome Verteilung: $5 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n-5$

(f) Falls ein anderer Zusammenhang zu σ bekannt ist, zum Beispiel die Poisson-Verteilung mit $\sigma = \sqrt{\mu}$

Lösung 2:

$n = 30 \Rightarrow X \sim t(29)$

(a) Kapitel 2.2: $\begin{bmatrix} 1446 & 1554 \end{bmatrix}$

(b) $L = 80 \Rightarrow c = \dfrac{L\sqrt{n}}{2\hat{\sigma}} = \dfrac{80\sqrt{30}}{2 \cdot 143.839} = 1.5232 \Rightarrow p = 1-\alpha = 0.93$

Lösung 3:

$n = 120 > 30 \Rightarrow$ Voraussetzung erfüllt.

1. $1-\alpha = 0.95$
2. $N(0,1)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-0.05/2} = x_{0.975} = 1.96$
3. $\bar{x} = \dfrac{1}{120}(21 \cdot 1 + 27 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 24 \cdot 4 + 15 \cdot 5 + 13 \cdot 6) = 3.2$
   $\sum_{i=1}^{120} x_i^2 = 21 \cdot 1^2 + 27 \cdot 2^2 + 20 \cdot 3^2 + 24 \cdot 4^2 + 15 \cdot 5^2 + 13 \cdot 6^2 = 1536$
   $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{n}{n-1}\bar{x}^2 = \dfrac{1}{119} \cdot 1536 - \dfrac{120}{119} \cdot 3.2^2 = 2.58$
   $\hat{\sigma} = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2.58} = 1.61$
4. $\dfrac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}} = \dfrac{1.61 \cdot 1.96}{\sqrt{120}} = 0.29$
5. $[3.2 - 0.29, 3.2 + 0.29] = [2.91, 3.49]$

Lösung 4:

$\begin{bmatrix} 200.3 & 201.7 \end{bmatrix}$, $L = 1.4$, $n \geq 31.8 \Rightarrow n \geq 32$

Lösung 5:

(a) $\begin{bmatrix} 8.02 & 9.98 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4.95 & 13.85 \end{bmatrix}$

Lösung 6:

(a) $n = 200 > 30 \Rightarrow$ Voraussetzung erfüllt.

1. $1 - \alpha = 0.95$
2. $N(0,1)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-0.05/2} = x_{0.975} = 1.96$
3. $\bar{x} = \dfrac{2400}{200} = 12$
   $s^2 = \dfrac{1}{199}30929 - \dfrac{200}{199}12^2 = 10.7$
   $\hat{\sigma} = s = \sqrt{s^2} = 3.27$
4. $\dfrac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}} = \dfrac{3.27 \cdot 1.96}{\sqrt{200}} = 0.45$
5. $\begin{bmatrix} 12 - 0.45 & 12 + 0.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.55 & 12.45 \end{bmatrix}$

(b) Obere Schranke $d = 4$, $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-0.01/2} = x_{0.995} = 2.576$
$n \geq \left(\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 2.576}{0.9}\right)^2 = 524.2 \Rightarrow n \geq 525$

Lösung 7:

(a) Schätzung nach Kapitel 2.3: $\begin{bmatrix} 2.202 & 2.798 \end{bmatrix}$

(b) $\dfrac{2.15c}{\sqrt{200}} = 0.5 \Rightarrow c = 3.29 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.9995 \Rightarrow \alpha = 0.001 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.999$

Lösung 8:

(a) Schätzung nach Kapitel 2.3: $\begin{bmatrix} 0.266 & 0.454 \end{bmatrix}$

(b) Lücke 60: $n \geq \left(\dfrac{1.96}{0.14}\right)^2 = 196$

Lösung 9:

(a) $\begin{bmatrix} 767 & 1342 \end{bmatrix}$

(b) $s^2 = \dfrac{99000}{99} = 1000$

Lösung 10:

(a) $\hat{\lambda} = \bar{x} = 325$

(b) $c = x_{1-\alpha/2} = 1.96,\ \frac{sc}{\sqrt{n}} = 352.97 - 325 \Rightarrow s = 90.25,\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot s = 89.11$

(c) $\left[5821.612364\right]$

Lösung 11:

$\left[0.5 \quad 0.7\right]$

Lösung 12:

(a) Bezüglich I_2 ist bekannt:

$$\left.\begin{array}{rcccr} c & = & x_{0.975} & = & 1.96 \\ \bar{x} & = & \frac{0.1216+0.2784}{2} & = & 0.2 \\ \hat{\sigma} & = & \sqrt{0.2 \cdot (1-0.2)} & = & 0.4 \\ \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}} & = & 0.2784 - 0.2 & = & 0.0784 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0.4 \cdot 1.96}{\sqrt{n}} = 0.0784 \Leftrightarrow n = \left(\frac{0.4 \cdot 1.96}{0.0784}\right)^2 = 100$$

(b) $1 - \alpha = 0.9$

(c) $L = 0.2658 - 0.1342 = 0.1316,\ \left(\frac{c}{L}\right)^2 = \left(\frac{1.96}{0.1316}\right)^2 = 221.82 \Rightarrow n \geq 222$

(d) $\hat{p} = \bar{x} = 0.2$