5 Aufgaben zur Punktschätzung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 20. Mai 2015, 10:04

Aufgabe 1: Reviewfragen

(a) Wozu dient die Punktschätzung?

(b) Was bedeutet *erwartungstreu* und *asymptotisch erwartungstreu*?

(c) Wozu dient die Bestimmung der *Wirksamkeit* einer Schätzufunktion?

(d) Was bedeutet hier der Begriff *Konsistenz*?

(e) Was ist der Unterschied zwischen einem Maximum-Likelihood-Schätzwert und einer Maximum-Likelihood-Schätzfunktion

(f) $\hat{\Theta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sei eine Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für den Parameter ϑ. Unter welcher Voraussetzung ist $\sin\hat{\Theta}$ eine Maximum-Likelihood-Schätzfunktion von $\sin\vartheta$?

Aufgabe 2:

Der Erwartungswert μ in der Grundgesamtheit soll durch folgende Stichprobenfunktionen geschätzt werden:

$$\hat{\Theta}_n = \frac{1}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \cdots + X_n), \quad \hat{\Theta}'_n = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} iX_i, \quad \hat{\Theta}''_n = \frac{2}{n(n+1)} \cdot (X_1 + 2X_2 + \cdot + nX_n)$$

Prüfen Sie die Erwartungstreue der Schätzfunktionen und ermitteln Sie die wirksamste unter den erwartungstreuen Schätzfunktionen. Sind die Schätzfunktionen konsistent?
Hinweis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3} n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

Aufgabe 3:

Es sei $x_1, \ldots, x_n$ das Ergebnis einer einfachen Stichprobe aus einer Poisson-verteilten Grundgesamtheit mit dem unbekannten Parameter μ.

a) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion für dieses Stichprobenergebnis

b) Zeigen Sie, dass $\bar{X}$ die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für den unbekannten Parameter μ ist.

c) Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für die Standardabweichung $\sqrt{\mu}$.

Aufgabe 4:

In einem gut gefüllten Saal befinden sich N Personen, die mit 1 bis N durchnummeriert sind. Herr Maier von der Gewerbeaufsicht kennt N nicht und wird vom Veranstalter mit allerlei Tricks am Betreten des Saals gehindert. Herr Maier, der N ermitteln möchte, ist lediglich in der Lage, die Nummer eines Teilnehmers, der zufällig den Saal verlässt, zu erkennen. Fassen Sie diese Nummer als Realisation x einer Zufallsvariablen X auf.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X (in Abhängigkeit von N).

b) Ist $2X - 1$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für N?

Aufgabe 5:

$X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ seien einfache Stichproben, wobei die Verteilung der X_i, Y_i vom unbekannten Parameter $p \in [0, \frac{1}{2}]$ abhängt. Für alle $i = 1, \ldots, n$ gelte:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_i) &= \mathrm{E}(X_i^2) = p \\ \mathrm{E}(Y_i) &= 1.5p \\ \mathrm{Var}(Y_i) &= 1.5p(1 - 1.5p) \\ \mathrm{E}(X_i \cdot Y_i) &= p^2 \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von p die Größen

$$\mathrm{Var}(X_i), \quad \mathrm{Cov}(X_i, Y_i), \quad \mathrm{E}(X_i + Y_i) \text{ und } \mathrm{Var}(X_i + Y_i)$$

b) Bestimmen Sie unter den drei Schätzfunktionen

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \hat{\Theta}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \hat{\Theta}_3 &= \frac{2}{5n} \sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i) \end{aligned}$$

die für p erwartungstreuen, und bestimmen Sie unter den erwartungstreuen die wirksamste.

Aufgabe 6:

Zwei unterschiedliche Messgeräte A und B messen laufend den Salzgehalt in einem Meerwasseraquarium. Beide Messgeräte liefern „im Mittel richtige“ Werte, was sich durch

$$E(X) = E(Y) = E(S) = \mu$$

beschreiben lässt, wobei X (bzw. Y) das vom Messgerät A (bzw. B) verwendete Messverfahren zur Messung des Salzgehalts S ist. Es ist bekannt, dass A ungenauere Messungen als B liefert, was sich durch

$$\mathrm{Var}(X) = 1.5 \cdot \mathrm{Var}(Y)$$

beschreiben lässt. Ferner sind X und Y unkorreliert. Beide Messgeräte liefern ihre Messergebnisse an einen Zentralrechner, der aus X und Y mittels den Gewichten a und b die Schätzfunktion

$$Z = a \cdot X + b \cdot Y$$

bildet.

(a) Wie müssen a und b gewählt werden, damit Z erwartungstreu für μ ist?

(b) Welche unter den erwartungstreuen Schätzfunktionen Z ist die wirksamste?

Aufgabe 7:

Gegeben sei eine einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ aus einer Grundgesamtheit mit unbekanntem Erwartungswert μ, der mit folgender Stichprobenfunktion geschätzt werden soll

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \alpha \cdot X_n \quad \text{mit } \alpha \in [-1; 1].$$

(a) Bestimmen Sie α so, dass $\hat{\Theta}$ erwartungstreu für μ ist. Ist die resultierende Schätzfunktion konsistent?

(b) Begründen Sie, ob das die wirksamste Schätzfunktion für μ ist.

(c) Angenommen, die Grundgesamtheit ist $N(\mu, 9)$ verteilt. Wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der von $\hat{\Theta}$ gelieferte Schätzwert $\hat{\vartheta}$ bei einem Stichprobenumfang von $n = 82$ im Intervall $\mu - 1; \mu + 1$ liegen wird?

Aufgabe 8:

Eine einfache Stichprobe bezüglich eines Merkmals X in einer Grundgesamtheit ergab folgende Ergebnisse:

x	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	4	4	3	2	1

Nehmen Sie zunächst an, X sei exponentialverteilt.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für λ.

(b) Wie groß ist unter Verwendung des Ergebnisses aus (a) die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert annimmt, der nicht kleiner als 2 ist?

(c) Lösen Sie die Teile (a) und (b) nun unter der Annahme, dass X Poisson-verteilt ist.

(d) Bei dem Merkmal X handelt es sich um die Anzahl der zwischen 23:00 und 24:00 Uhr an einer Tankstelle tankenden Kraftfahrzeuge. Begründen Sie kurz, welche der beiden obigen Verteilungsannahmen sinnvoller ist.

Aufgabe 9:

Die Zeitdauer T für einen bestimmten Vorgang sei gemäß der Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-b\sqrt{t}} \text{ für } t > 0$$

verteilt (mit $F(t) = 0$ für $t \leq 0$).

(a) Bestimmen Sie den Median t_{Med} in Abhängigkeit vom Parameter b.

(b) Bei einer einfachen Stichprobe zum Merkmal T vom Umfang $n = 10$ wurden die Zeitdauern

$$(1, 4, 9, 9, 4, 4, 4, 1, 1, 4)$$

registriert. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{b}$ für b. (Die zweite Ableitung muss nicht ausgewertet werden.)

(c) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{t}_{\text{Med}}$ für den Median aus der in (b) angegebenen Stichprobenrealisation.

Aufgabe 10:

Freikletterer Hans interessiert, wie groß die Entfernung Z von seiner frei werdenden Hand zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt während des Kletterns zum nächsten „Henkel“ (großer guter Griff für alle Finger) ist. Er geht davon aus, dass Z gleichverteilt über dem Intervall $[0, d]$ ist.

(a) Stellen Sie die Likelihood-Funktion $f(z_1, z_2, \ldots, z_n|d)$ für eine Stichprobenrealisation $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ auf.

(b) Für $n = 5$ Entfernungsmessungen (in Armlängen) hat er sich die Stichprobenrealisation

$$(z_1, \ldots, z_5) = (6, 18, 11, 20, 9)$$

gemerkt. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{d}$ für d.