3 Übungen zu Verteilungsparameter, Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 27. März 2015, 09:58

Aufgabe 1: Reviewfragen

(a) Wie sind Modus, Median und α-Fraktil definiert?

(b) Wie lässt sich das α-Fraktil bestimmen, wenn der exakte Wert nicht vertafelt ist?

(c) Beschreiben Sie eine konvexe / konkave Funktion.

(d) Was ist die Varianz / Standardabweichung einer Zufallsvariablen?

(e) Was ist der Unterschied zwischen Stichprobenmittel $\bar{X}$ und Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$?

(f) Wie lässt sich für diskrete Zufallsvariablen X, Y die Rand-Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ von $f(x, y)$ bestimmen?

(g) Was besagt der zentrale Grenzwertsatz?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz, Modus und Median folgender Verteilungen der Zufallsvariablen X:

(a) X diskret mit

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(b) X diskret mit

x_i	-2	-1	0	2	4	7	8
$f(x_i)$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.05

(c) X stetig mit

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Die diskreten Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig und wie folgt verteilt:

x_i	0	1	2
$f_1(x_i)$	0.1	0.3	

y_i	2	4	6
$f_2(y_i)$	0.2		0.1

Bestimmen Sie die fehlenden Einzelwahrscheinlichkeiten und dann die Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x_i, y_j)$.

Aufgabe 4:

Gegeben ist die *unvollständige* Verteilungstabelle der diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y)

X \ Y	0	1	2	
2	0.07			0.2
3		0.15	0.175	
4	0.105	0.09		0.3
		0.3		

Bestimmen Sie die fehlenden Einzelwahrscheinlichkeiten und dann $f_1(x_i)$, $f_2(y_j)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$. Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 5:

Die Verteilung einer stetigen zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) hat die Dichtefunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} k\,(x + y) & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \quad 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

(a) die Konstante k,

(b) die Dichten $f_1(x)$ und $f_2(y)$ der Randverteilungen,

(c) die Erwartungswerte $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{E}(Y)$, sowie die Varianzen $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Var}(Y)$ und

(d) die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 1.6, Y \leq 2.2)$ und $P(1.1 \leq X \leq 1.5, 2.3 \leq Y \leq 2.6)$

Aufgabe 6:

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $H(y)$ und die Dichtefunktion $h(y)$ für die von X abhängige Zufallsvariable $Y = \ln(X)$.
Hinweis: Bestimmen Sie in folgender Reihenfolge:

1. den Wertebereich von Y
2. die Verteilungsfunktion $H(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y)$
3. die Dichtefunktion $h(y) = \dfrac{\mathrm{d}H(y)}{\mathrm{d}y}$

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass für $Y = g(X)$ der Erwartungswert $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ ist.

Hinweis: Gehen Sie der Einfachheit halber davon aus, das $g(X)$ stetig und streng monoton ist. Nutzen Sie die Erkenntnisse aus der vorigen Aufgabe.

Lösung 1:

(a)
- x_{Mod} ist Maximum der Wahrscheinlichkeits- oder Dichtefunktion (im Allgemeinen nicht eindeutig, zum Beispiel Gleichverteilung)
- $F(x_{\text{Med}}) = \frac{1}{2}$, oder kleinstes x mit $F(x) > \frac{1}{1}$
- $F(x_\alpha) = \alpha$

(b) Durch Interpolation.

(c) Konvex / konkav: nach außen / innen gewölbt, aus Sicht der x-Achse, z.B. $y = x^2$ / $y = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$

(d) Die Varianz ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Erwartungswert: $\text{Var}(X) = \text{E}(X - \text{E}(X))^2$. Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz.

(e) $\bar{X}$ ist der Mittelwert, der sich aus einer bestimmten Stichprobe ergibt, $\text{E}(X)$ ist der theoretische Wert, der sich aus der Verteilung ergibt.

(f) $f_1(x) = \sum_{i=1}^{m} f(x, y_i)$, $f_2(y) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y)$, für Zufallsvariablen X und Y mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

(g) Summen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen sind für große n normalverteilt.

Lösung 2:

(a) $\text{E}(X) = 2.75$, $\text{Var}(X) = 1.4375$, $x_{\text{Mod}} = 2$, $x_{\text{Med}} = 2$

(b) $\text{E}(X) = 2.3$, $\text{Var}(X) = 7.51$, $x_{\text{Mod}} = 2$, $x_{\text{Med}} = 2$

(c) $\text{E}(X) = \frac{4}{3}$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{18}$, $x_{\text{Mod}} = 1$, $x_{\text{Med}} = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}} = 1.2929$

Lösung 3:

X \ Y	2	4	6	$f_1(x_i)$
0	0.02	0.07	0.01	0.1
1	0.06	0.21	0.03	0.3
2	0.12	0.42	0.06	0.6
$f_2(y_j)$	0.2	0.7	0.1	1.0

Lösung 4:

X \ Y	0	1	2	$f_1(x_i)$
2	0.07	0.06	0.07	0.2
3	0.175	0.15	0.175	0.5
4	0.105	0.09	0.105	0.3
$f_2(y_j)$	0.35	0.3	0.35	1

$\mathrm{E}(X) = 3.1 \quad \mathrm{E}(Y) = 1 \quad \mathrm{Var}(X) = 0.49 \quad \mathrm{Var}(Y) = 0.7$

X und Y sind unabhängig, weil $f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \cdot f_2(y_j)$ für alle i, j gilt.

Lösung 5:

(a)

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= k \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(\xi,\psi)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\xi = k \int_{1}^{x} \int_{2}^{y} f(\xi,\psi)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\xi \\
&= k \int_{1}^{x} \int_{2}^{y} (\xi+\psi)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\xi = k \int_{1}^{x} \left[\psi\xi + \frac{\psi^2}{2}\right]_2^y \mathrm{d}\xi \\
&= k \int_{1}^{x} \left(\xi y + \frac{y^2}{2} - 2\xi - 2\right) \mathrm{d}\xi = k \left[\frac{\xi^2 y}{2} + \frac{\xi y^2}{2} - \xi^2 - 2\xi\right]_1^x \\
&= k \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{x y^2}{2} - x^2 - 2x - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} + 3\right)
\end{aligned}
$$

Es muss gelten $F(+\infty,+\infty) = F(2,3) = 4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$. Die Verteilungsfunktion ist somit

$$
\frac{1}{8}\left(x^2 y + x y^2 - 2x^2 - 4x - y - y^2 + 6\right)
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= F(x,\infty) = F(x,3) = \frac{1}{8}\left(3x^2 + 9x - 2x^2 - 4x - 3 - 9 + 6\right) = \frac{1}{8}\left(x^2 + 5x - 6\right) \\
f_1(x) &= \frac{\mathrm{d}F_1(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{2x+5}{8} \\
F_2(y) &= F(\infty,y) = F(2,y) = \frac{1}{8}\left(4y + 2y^2 - 8 - 8 - y - y^2 + 6\right) = \frac{1}{8}(y^2 + 3y - 10) \\
f_2(y) &= \frac{\mathrm{d}F_2(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{2y+3}{8}
\end{aligned}
$$

(c)

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} x \cdot \frac{2x+5}{8}\,\mathrm{d}x = \frac{73}{48} = 1.5208$$
$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y = \int_{2}^{3} y \cdot \frac{2y+3}{8}\,\mathrm{d}x = \frac{121}{48} = 2.5208$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} x^2 \cdot \frac{2x+5}{8}\,\mathrm{d}x = 2.3958$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 0.0829$$
$$\mathrm{E}(Y^2) = 6.4375 \Rightarrow \mathrm{Var}(Y) = 0.0829$$

(d) $P(X \leq 1.6, Y \leq 2.2) = F(1.6, 2.2) = 0.102$

$$P(1.1 \leq X \leq 1.5, 2.3 \leq Y \leq 2.6) = \int_{1.1}^{1.5}\int_{2.3}^{2.6} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0.1125$$

Lösung 6:

$F(x) = x^3$

1. $Y = \ln X \Rightarrow -\infty < y \leq 0$
2. $H(y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq \mathrm{e}^y) = F(\mathrm{e}^y) = \mathrm{e}^{3y}$
3. $h(y) = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{3y} & \text{für } -\infty < y \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung 7:

Es sei $h(y)$ die Dichte- und $H(y)$ die Verteilungsfunktion von Y. Es gilt zudem

$$y = g(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y) \quad \mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x \quad H(y) = F(g^{-1}(y))$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot h(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\frac{\mathrm{d}H(y)}{\mathrm{d}y}\,g'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\frac{\mathrm{d}F(g^{-1}(y))}{\mathrm{d}y}\,g'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\mathrm{d}F(x)}{g'(x)\,\mathrm{d}x}g'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$