

# Angewandte Mathematik

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 6. November 2016, 0:45



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Überblick, Funktionen mehrerer Variablen,</b>	
<b>Partielle Ableitung</b>	<b>5</b>
1.1 Prolog . . . . .	5
1.2 Überblick über das dritte Semester . . . . .	6
1.2.1 Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	6
1.2.2 Lineare Differentialgleichungs-Systeme erster Ordnung . . . . .	6
1.2.3 Numerische Integration von Differentialgleichungen . . . . .	7
1.3 Reellwertige Funktionen mit mehreren Veränderlichen . . . . .	7
1.3.1 Ideen und Darstellungsverfahren . . . . .	7
1.3.2 Formales . . . . .	8
1.4 Partielle Ableitungen, Gradient . . . . .	8
1.5 Übungsaufgaben . . . . .	10
<b>2 Anwendungen der partiellen Ableitung</b>	<b>11</b>
2.1 Lineare Näherung, Tangentialebene . . . . .	11
2.2 Lineare Fehlerfortpflanzung bei indirekter Messung einer Größe . . . . .	12
2.3 Implizite Ableitung . . . . .	13
2.4 Allgemeine Kettenregel . . . . .	14
2.5 Übungsaufgaben . . . . .	14
<b>3 Extremwertrechnung</b>	<b>15</b>
3.1 Extrema von Funktionen zweier Veränderlicher . . . . .	15
3.2 Extremwertaufgaben mit explizit auflösbaren Nebenbedingungen . . . . .	17
3.3 Extremwertaufgaben mit nicht explizit auflösbaren Nebenbedingungen . . . . .	18
3.4 Übungsaufgaben . . . . .	19
<b>4 Mehrdimensionale Integrale</b>	<b>20</b>
4.1 Mehrdimensionale Integrale . . . . .	20
4.2 Berechnung kartesischer Mehrfachintegrale . . . . .	21
4.3 Anwendungen . . . . .	22
4.4 Übungsaufgaben . . . . .	24
<b>5 Koordinatensysteme</b>	<b>25</b>
5.1 Polar-, Zylinder und Kugelkoordinaten . . . . .	25
5.1.1 Motivation . . . . .	25
5.1.2 Polarkoordinaten . . . . .	25
5.1.3 Zylinderkoordinaten . . . . .	26
5.1.4 Kugelkoordinaten . . . . .	28
5.2 Integration in Polarkoordinaten . . . . .	29
5.3 Integration in Kugelkoordinaten . . . . .	30
5.4 Übungsaufgaben . . . . .	30
<b>6 Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>31</b>
6.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	31
6.1.1 Lösung durch Ansatz . . . . .	31

6.1.2	Homogene lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	31
6.1.3	Inhomogene lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	32
6.1.4	Variation der Konstanten . . . . .	32
6.2	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	33
6.2.1	Homogene lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	33
6.2.2	Lösung durch Ansatz . . . . .	33
6.2.3	Inhomogene lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	34
6.3	Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen . . . . .	34
6.4	Übungsaufgaben . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Laplace-Transformation zur Lösung von linearen Differentialgleichungen</b>	<b>36</b>
7.1	Einleitung . . . . .	36
7.2	Laplace-Transformierte verschiedener Funktionen . . . . .	37
7.3	Inverse Laplace-Transformation . . . . .	38
7.4	Partialbruchzerlegung . . . . .	38
7.5	Übungen . . . . .	39
<b>8</b>	<b>Lineare Differentialgleichungssysteme und Fundamentalmatrix</b>	<b>40</b>
8.1	Transformation in ein DGL-System 1. Ordnung . . . . .	40
8.2	Lösung im Zeitbereich . . . . .	41
8.3	Lösung im Bildbereich zur Bestimmung der Fundamentalmatrix . . . . .	42
8.4	Berechnung der Fundamentalmatrix mit dem Satz von Cayley-Hamilton . . . . .	43
8.5	Übungsaufgaben . . . . .	44
<b>9</b>	<b>Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>45</b>
9.1	Aufgabenstellung . . . . .	45
9.2	Modellanalyse . . . . .	47
9.3	Numerische Integrationsverfahren . . . . .	49
9.3.1	Explizite und implizite Verfahren . . . . .	49
9.3.2	Einschritt- oder Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	50
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>54</b>
A.1	Tabellen . . . . .	54
	<b>Literatur</b>	<b>57</b>



# 1 Überblick, Funktionen mehrerer Variablen, Partielle Ableitung

## 1.1 Prolog

### Drei Arten von Mathematik

Es lassen sich grob drei Arten von Mathematik unterscheiden:

- **Schulmathematik** besteht wohl oft aus dem Auswendiglernen von Formeln, dem Einsetzen von Zahlen und Eintippen in den Taschenrechner.
- **Mathematik als Wissenschaft für sich**, wie sie in einem Universitätsstudiengang Mathematik gelehrt wird, baut mehr oder minder interessante mathematische Objekte und leitet Sätze darüber her - nach dem Muster: Definition, Satz, Beweis, ab und zu mit einem Lemma (Hilfssatz) oder einem Korollar (einfache Folgerung) zwischendurch.
- In der **Ingenieurmathematik** oder allgemeiner **Angewandten Mathematik** werden mathematische Modelle erstellt und ausgewertet - in der Physik und im Maschinenbau ebenso wie in der Biologie, der Soziologie oder den Wirtschaftswissenschaften.

### Modell und Wirklichkeit

Mathematik sagt nicht, was die Welt ist. Mathematik ist nur ein Baukasten, um die Welt zu modellieren – und damit zum Beispiel vorherzusagen, wie sich ein Fahrzeug verhalten wird oder wie dünn das Eis der Arktis im nächsten Sommer ist. Die Natur- und Technikwissenschaften benutzen die Mathematik, um einerseits immer genauere Modelle zu formulieren, und andererseits Modelle mit der richtigen Modellierungstiefe, angepasst an die Fragestellung, zu bilden. Beispiel: Modellierung der Fahrdynamik:

- lineares Einspurmodell,  $i_S = \text{konstant}$
- lineares Einspurmodell,  $i_S = f(\delta_H)$
- Nichtlineares Einspurmodell
- Zweispurmodell mit Reifen- und Achskennlinien
- Mehrkörpersystem mit Achsbauteilen und Reifenkennliniein
- Mehrkörpersystem mit Achsbauteilen und FEM<sup>1</sup>-Reifenmodellen

Mathematik ist nie die Wirklichkeit, sondern ein Mittel, Beobachtungen zu Modellen zu verdichten und dann daraus Vorhersagen zu gewinnen, insbesondere durch Simulationen. In der Ingenieurmathematik sucht man Modelle, die für die gegebene Anwendung gut genug sind. Beispiel: Um das grundlegende Fahrverhalten eines Autos auszulegen, genügt es, die Reifenkräfte als linear zu betrachten. Die Ingenieurmathematik stellt einen Werkzeugkasten zum Modellieren bereit. Funktionen, Ableitungen und Integrale haben sich über Jahrhunderte als extrem hilfreich herausgestellt, um die Natur zu beschreiben und um Maschinen zu konstruieren. Mathematik ist also nur am Rande das Rechnen, sondern viel mehr der kreative Umgang mit Modellen. Mit Pauken kommt man allenfalls in der Schulmathematik weiter. Außerhalb der Schulmathematik hilft nur

---

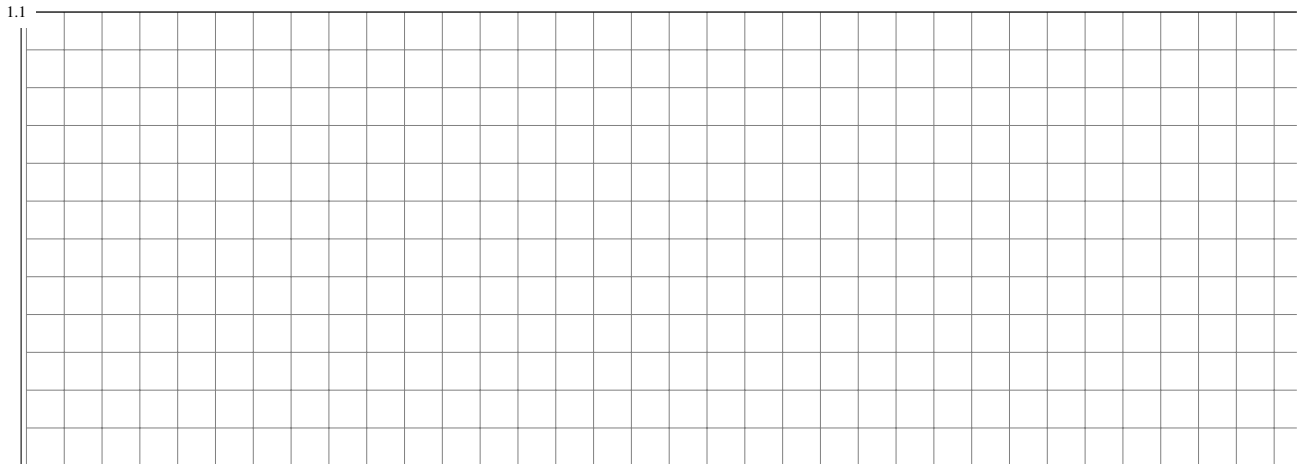
<sup>1</sup>Finite Elemente Methode

Verstehen. Dazu muss man Mathematik anwenden: konkrete Probleme bearbeiten. Und das kostet Zeit. Die meisten spannenden Probleme lassen sich nicht auf Anhieb lösen, sondern verlangen einiges an Nachdenken und Versuchen mit verschiedenen Ansätzen. Um so schöner ist es, ein Problem dann tatsächlich geknackt zu haben.

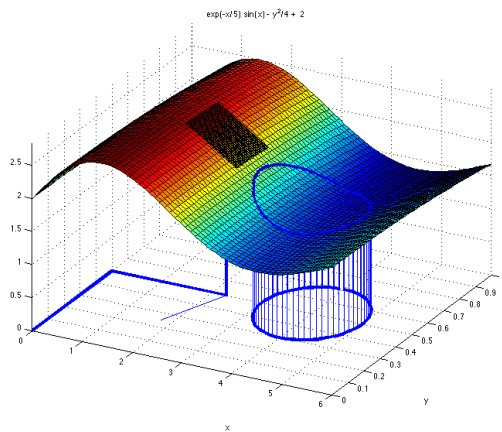
## 1.2 Überblick über das dritte Semester

### 1.2.1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Die meisten praktisch relevanten Größen hängen nicht von einer einzigen Variablen ab, sondern gleich von mehreren. Deshalb untersucht man Funktionen *mehrerer* Variablen. Beispiele:

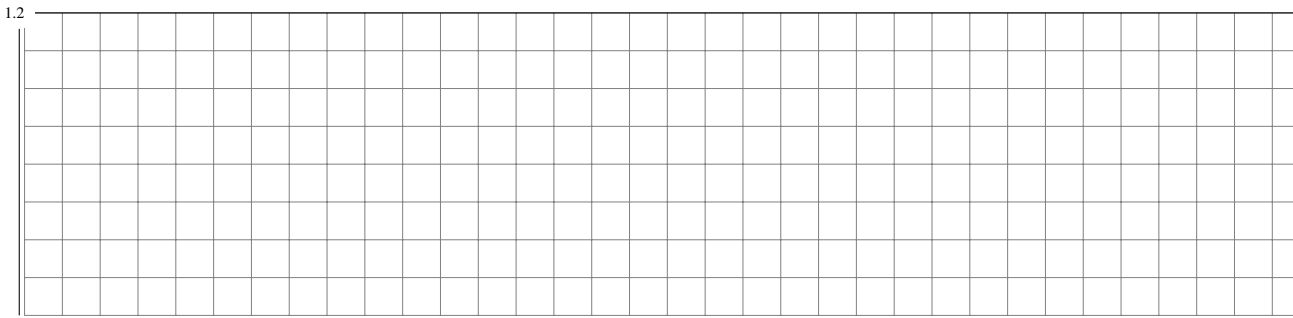


Was Ableitung und Integral solcher Funktionen bedeuten:



### 1.2.2 Lineare Differentialgleichungs-Systeme erster Ordnung

Zum Werkzeugkasten des Ingenieurs gehört die Beschreibung von dynamischen Systemen in Form von DGL-Systemen, linear(-isiert) und mit konstanten Koeffizienten, so dass man die Stabilität und den Zeitverlauf bei bestimmten Anregung untersuchen und Regelungen entwerfen kann. Wir werden die DGL-Systeme algebraisch und numerisch lösen sowie die Stabilität betrachten. Einfaches Beispiel: die homogene Schwingungsdifferentialgleichung  $m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0$ :



### 1.2.3 Numerische Integration von Differentialgleichungen

Sind die Differentialgleichungen nichtlineare oder die Anregung im Voraus unbekannt, bleibt häufig nur die numerische Lösung der Differentialgleichungen. Wir lernen die Grundlagen der numerischen Integration und Einschritt-Verfahren wie zum Beispiel RUNGE-KUTTA 4. Ordnung kennen.

## 1.3 Reellwertige Funktionen mit mehreren Veränderlichen

### 1.3.1 Ideen und Darstellungsverfahren

Üblicherweise stellt man sich reellwertige Funktionen zweier reeller Unabhängiger als Gebirge oder „fliegender Teppich“ vor. Zur Darstellung lassen sich Google, freie Programme wie Grapher (☺), QtiPlot (☺, ☺), Microsoft Mathematics 4.0 (☐) und natürlich auch kommerzielle Programme wie MATLAB<sup>®</sup> (☺, ☺, ☐) nutzen. Darstellung mit MATLAB<sup>®</sup>-Boardmitteln:

```

1  x = -10:1:10; y = -10:1:10;
2  [xx,yy]=meshgrid(x,y);
3  z = xx.^2 + yy.^2 + 0.1*yy.^3;
4  surf(x,y,z)
5  colorbar

```

In zwei Dimensionen lassen sich die z-Werte durch reines Einfärben darstellen:

```

6  %%
7  imagesc(x,y,z)
8  colorbar

```

Eine Alternative sind Höhenlinien, allgemein als Isolinien oder Äquipotentiallinien bezeichnet:

```

9  %%
10 contour(x,y,z)
11 colorbar

```

Häufig werden Funktionen mehrerer Unabhängiger auch als Kennlinienfeld (family of characteristics) dargestellt:

```

12 %%
13 clf
14 hold all
15 h=[]; s='';
16 for yi=-10:5:10
17     z=x.^2+yi^2+0.1*yi^3;
18     h=[h plot(x,z)];

```

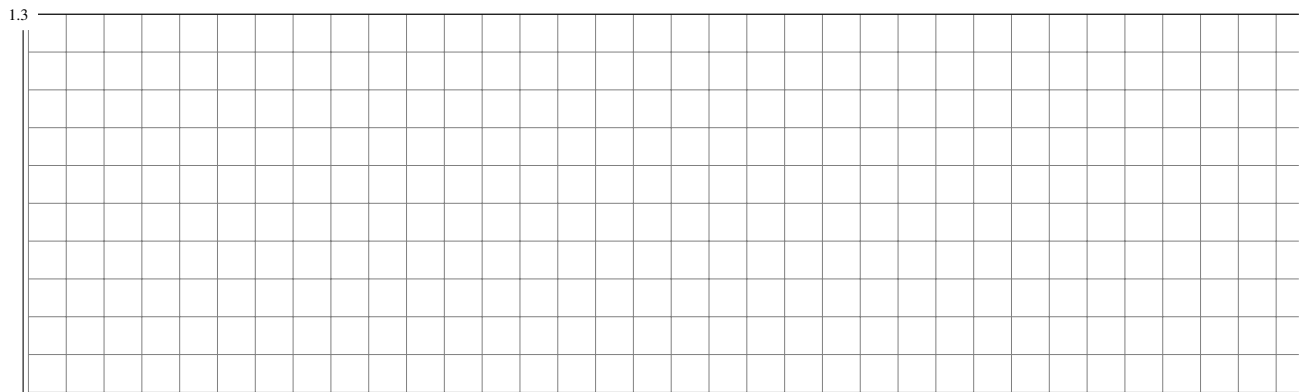
```
19     s=char({s;['y = ' num2str(yi,'%+4.1f')]})};
20     end
21     [m,n]=size(s);
22     s=s(2:m,:);
23     legend(h,char(s))
24     set(gca,'fontsize',16)
25     hold off
```

Falls die *Symbolic Math Toolbox* in MATLAB<sup>®</sup> installiert ist, lassen sich Funktionen mit weniger Aufwand darstellen:

```
26     %%
27     ezsurf('x^2+y^2+0.1*y^3',[-2 2 -1 1])
28     %%
29     ezcontour('0.3*x^2+y^2+0.1*y^3',[-2 2 -1 1])
```

### 1.3.2 Formales

Eine Funktion  $f$  von  $n$  Veränderlichen ordnet jedem Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  aus einem *Definitionsbereich*  $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  genau einen Wert  $f(\mathbf{x})$  der *Zielmenge*  $\mathbb{R}$  zu. Die Menge der *tatsächlich* dabei vorkommenden Werte  $f(\mathbf{x})$  heißt *Bild* der Funktion  $f$ , kurz  $f(\mathbf{D})$ . Die Begriffe *Wertebereich* und *Wertevorrat* werden in der Literatur nicht einheitlich genutzt und können das Bild oder auch die Zielmenge bezeichnen.



### 1.4 Partielle Ableitungen, Gradient

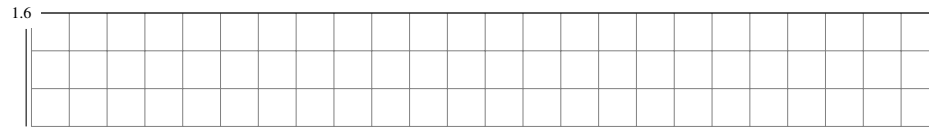
Die Ableitung einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x$  gibt an, wie sich die Funktion ändert, wenn man einen „unendlich“ kleinen Schritt von  $x$  vorwärts oder rückwärts macht. Bei einer Funktion mehrerer Unabhängiger lässt sich dieser Schritt auch quer machen. Das Einfachste ist, entlang einer der Achsen zu schreiten. Das ergibt die jeweilige partielle Ableitung: Man behandelt alle Unabhängige als Konstante - bis auf einen einzige Unbekannte - und leitet ganz normal nach dieser einen ab. Das Symbol dafür ist der Differentialquotient mit geschwungenem  $d$ , also  $\partial$ . Beispiele:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$

- $f(x, y) = \sin(xy)$

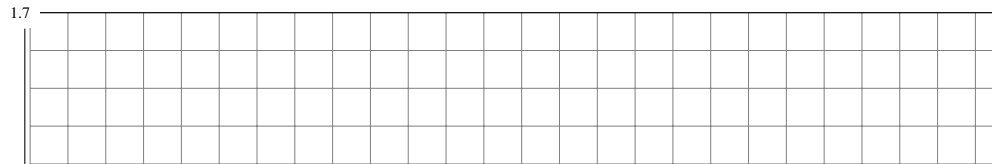


- $f(u, v, w) = uv^2 + ve^w$

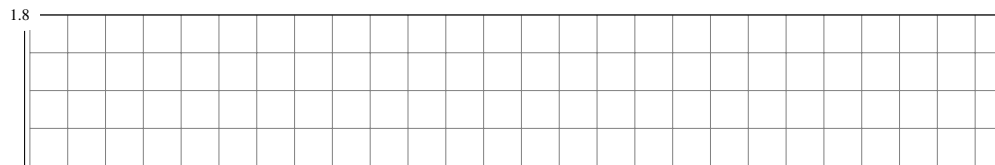


Die partiellen Ableitungen lassen sich zu einem Vektor übereinanderstellen, zum sogenannten *Gradienten* der Funktion, geschrieben  $\text{grad } f$  oder  $\nabla f$ , oft auch mit Vektorpfeilen zu sehen:  $\overrightarrow{\text{grad } f}$ ,  $\overrightarrow{\nabla f}$ . Das Symbol  $\nabla$  heißt „Nabla“ und kommt auch noch in anderen Zusammenhängen vor. Für die drei Beispiele ist der Gradient also:

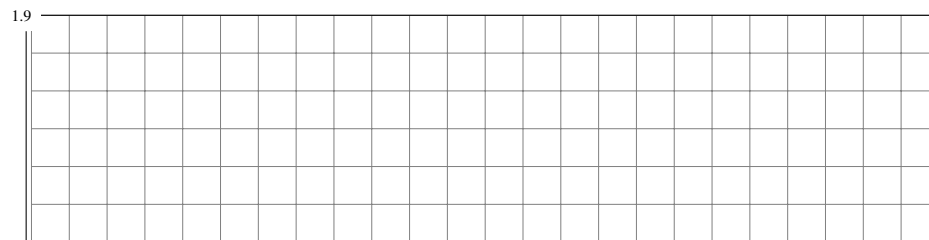
- $f(x, y) = x^2 + y^2$



- $f(x, y) = \sin(xy)$



- $f(u, v, w) = uv^2 + ve^w$



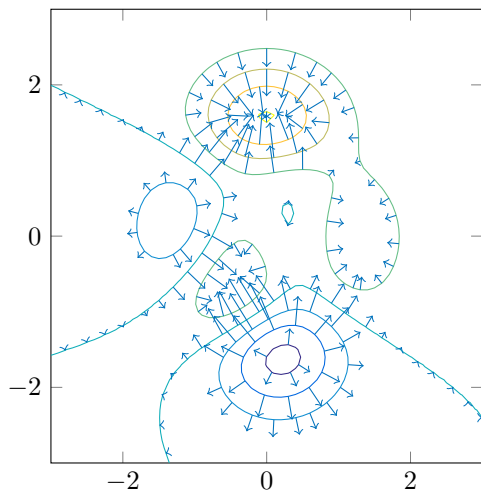
Hier wird jedem Punkt des Definitionsbereichs nicht eine Zahl zugeordnet, sondern ein Vektor: Das sind Vektorfelder. In MATLAB<sup>®</sup> lässt sich das folgendermaßen darstellen:

```

30  %%
31  syms X Y
32  f=symfun(X^2+Y^2+0.1*Y^3, [X Y])
33  g=symfun(gradient(f), [X Y])
34  gXY=(g(xx,yy));
35  ezcontour(f)
36  hold all, quiver(xx,yy,double(gXY{1}),double(gXY{2})), hold off

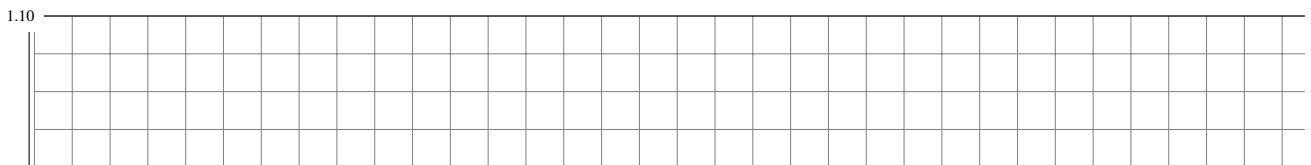
```

Hier lässt sich die Bedeutung des Gradienten erkennen: Je länger er ist, umso steiler ist die Funktion an jener Stelle. Der Gradient zeigt in die Richtung des (örtlich!) steilsten Anstiegs der Funktion. Deswegen steht er *senkrecht* auf den *Höhenlinien*.



Achtung: Wie die Höhenlinien lebt der Gradient einer Funktion von  $n$  Veränderlichen im  $\mathbb{R}^n$ , bei  $n = 2$  also in der Ebene der Landkarte. Er zeigt *nicht* steil den Berg hinauf! Mit `ezsurf` statt `ezcontour` im vorigen Programm lässt sich das noch deutlicher sehen.

Streng genommen müsste man diskutieren, was es heißt, dass eine Funktion von  $n$  Veränderlichen „total“ differenzierbar ist - also nicht nur partiell differenzierbar. In der Praxis ist das kein Problem: Wenn in einer Umgebung einer Stelle alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, kann man dort in beliebige Richtungen ableiten, auch schräg zu den Koordinatenachsen. Insbesondere sind dann die partiellen Ableitungen vertauschbar:

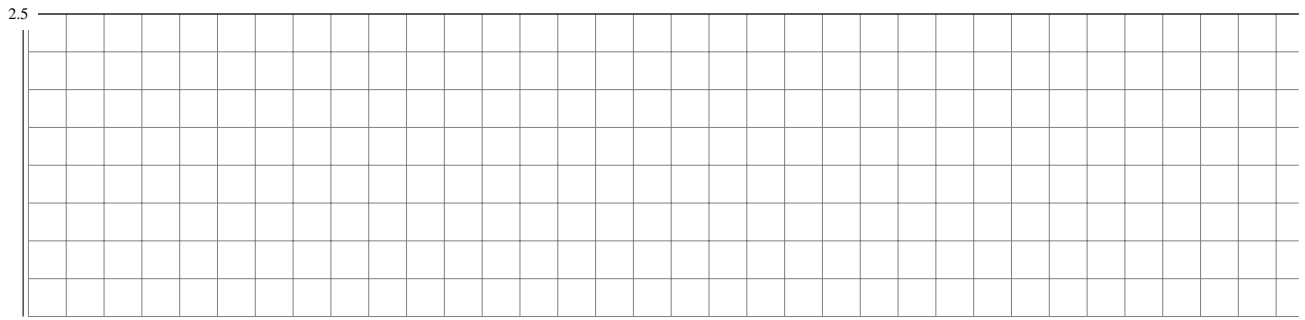


## 1.5 Übungsaufgaben

[Pap12a]: Seite 332f, zu Abschnitt 1 alle Aufgaben, zu Abschnitt 2 Aufgaben 1-6.



Das lässt sich auch als das „totale Differential“  $df$  der Funktion  $f$  schreiben:

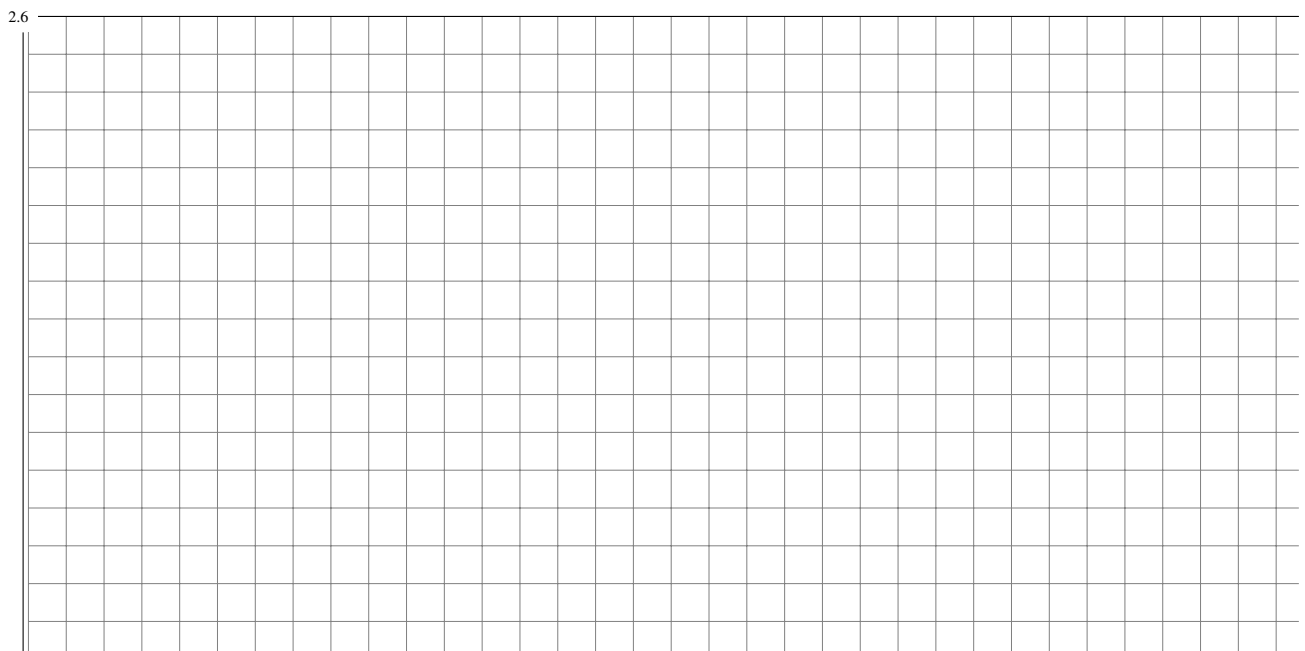


Entsprechend mit  $n$  Veränderlichen.

## 2.2 Lineare Fehlerfortpflanzung bei indirekter Messung einer Größe

Angenommen, wir kennen die arithmetischen Mittelwerte  $\bar{x} = 5.0$  und  $\bar{y} = 3.0$  zweier direkt gemessenen Größen  $x$  und  $y$ , sowie die Messunsicherheiten (Standardabweichungen)  $\Delta x = 0.2$  und  $\Delta y = 0.3$ . In welchem Bereich liegt dann der Wert folgender Funktion?

$$z = f(x, y) = x/(1 + y^2)$$



Hier lässt sich mehr oder minder komplex über den Verlauf der Funktion nachdenken und zum Beispiel mit Monotonie argumentieren - oder aber einfach statt der Funktion ihre Tangentialebene untersuchen. Vorsicht: Das ist nicht exakt! Man muss sich überzeugen, dass die Tangentialebene dicht genug an der Funktion liegt.

Die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle (5, 3) ist:

2.7

Daran lässt sich sofort der mögliche Bereich der Ergebnisse ablesen:

2.8

Das Rezept ist also:


2.9

Das Messergebnis wird dann in der Form  $\left\| \begin{array}{c} \text{2.10} \\ \hline \end{array} \right\|$  angegeben.

## 2.3 Implizite Ableitung

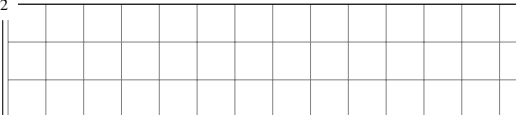
Wie lässt sich die Ableitung einer Kurve berechnen, die nur als Term und nicht explizit gegeben ist, zum Beispiel die Steigung einer Ellipse  $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ? Hierfür lässt sich das totale Differential  $dF = F_x dx + F_y dy$  nutzen:

2.11



Für die implizite Ableitung einer Funktion  $F(x, y) = 0$  gilt somit

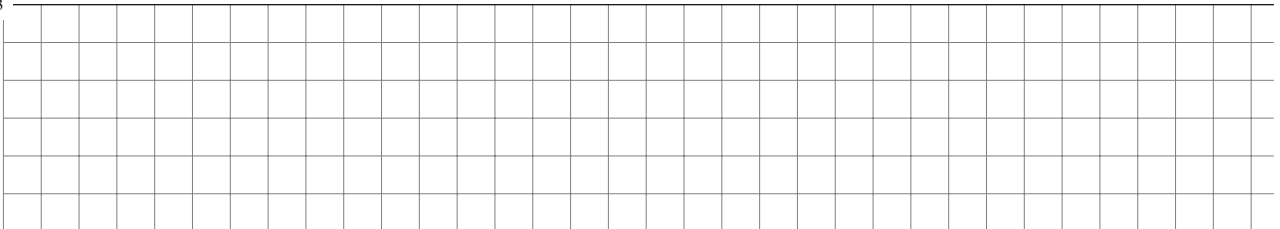
2.12



### 2.4 Allgemeine Kettenregel

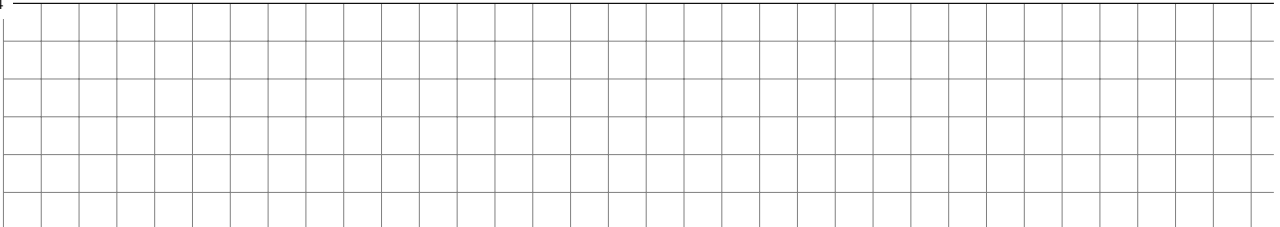
Wenn die Koordinaten  $x$  und  $y$  von einem weiteren Parameter  $t$ , zum Beispiel der Zeit abhängen, dann lässt sich die Funktion  $F(t) = f(x(t), y(t))$  mit Hilfe der allgemeinen Kettenregel nach dem Parameter  $t$  ableiten:

2.13



Dies lässt sich leicht auf mehr als zwei Variablen übertragen:

2.14



### 2.5 Übungsaufgaben

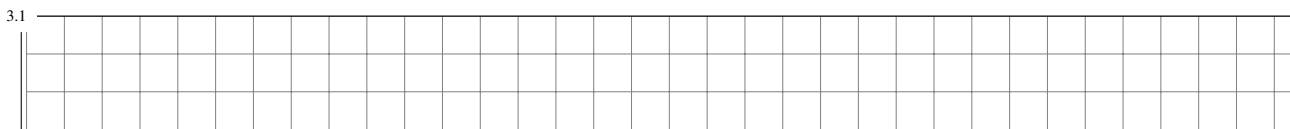
[Pap12a, Seite 333f]: zu Abschnitt 2 Aufgaben 7-23.

### 3 Extremwertrechnung

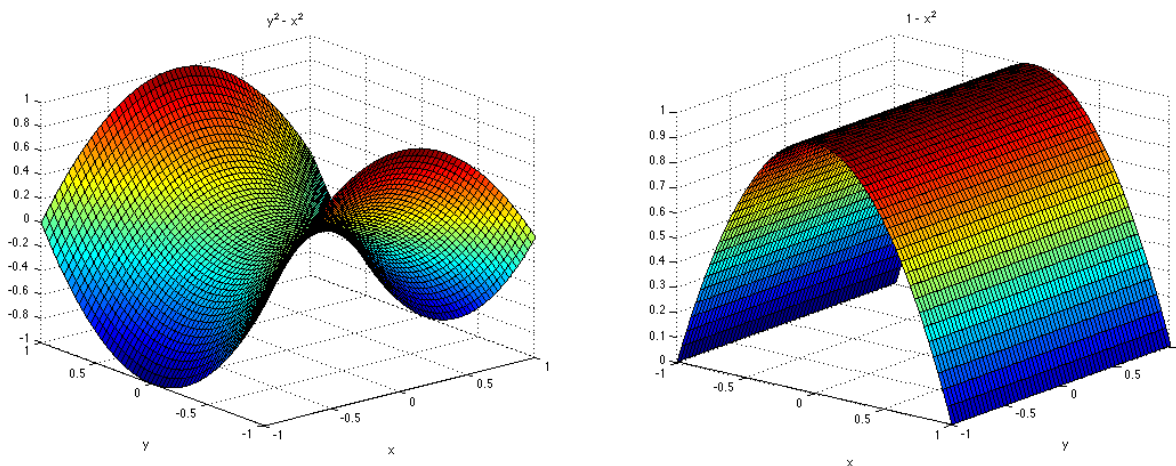
#### 3.1 Extrema von Funktionen zweier Veränderlicher

Wie bei Funktionen von einer Veränderlichen untersucht man Stellen im Inneren des Definitionsbereichs, an denen der Funktionswert entweder größer oder kleiner als alle Funktionswerte in einer Umgebung ist: *lokale* Maxima und Minima (Sammelbegriff: Extrema). Der insgesamt größte oder kleinste Funktionswert heißt das *globale* Maximum oder Minimum. Wenn der existiert (was nicht sein muss!), wird er entweder ein lokales Maximum oder Minimum sein, oder am Rand des Definitionsbereichs liegen. Somit gibt es typischerweise eine überschaubare Sammlung an Funktionswerten, von denen sich der größte oder kleinste durch Vergleichen bestimmen lässt.

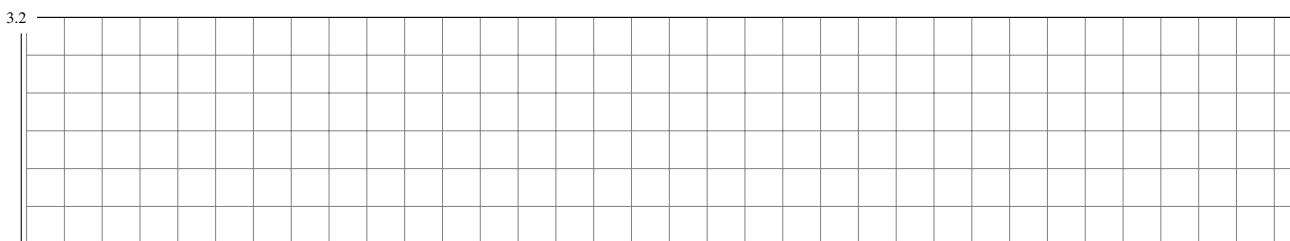
Die lokalen Extrema lassen sich mit Hilfe der Ableitungen finden. Damit an einer Stelle  $x_0, y_0$  im Inneren des Definitionsbereichs ein lokales Extremum liegen kann, muss gelten (notwendige Bedingung):



Diese Bedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend, wie diese geometrische Situationen zeigen:



Meist - aber nicht immer - lässt sich die Lage mit der zweiten Ableitung aufklären. Bei Funktionen *einer* Veränderlichen kommt es auf das Vorzeichen der zweiten Ableitung an. Mit *zwei* Veränderlichen lässt sich untersuchen, ob sich die Funktion in jede Richtung nach unten oder nach oben oder mal so mal so von der Tangentialebene wegkrümmt. Dazu bildet man die Matrix mit den Werten aller zweiten partiellen Ableitungen an  $(x_0, y_0)$ , die sogenannte Hessematrix.:

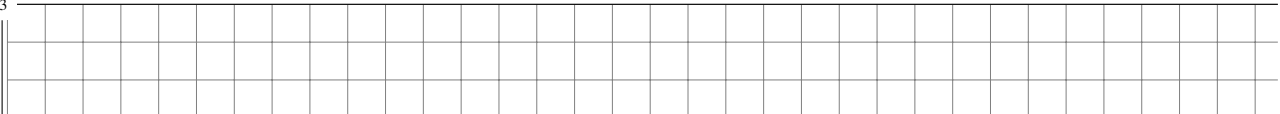


Diese Matrix ist immer symmetrisch. Wenn alle Eigenwerte dieser Matrix positiv sind, krümmt sich die Funktion an  $(x_0, y_0)$  nach oben von der Tangentialebene weg. Wenn alle Eigenwerte negativ sind, krümmt sich die Funktion nach unten weg. In allen übrigen Fällen (Eigenwerte null oder gemischt positiv und negativ) lässt

### 3 Extremwertrechnung

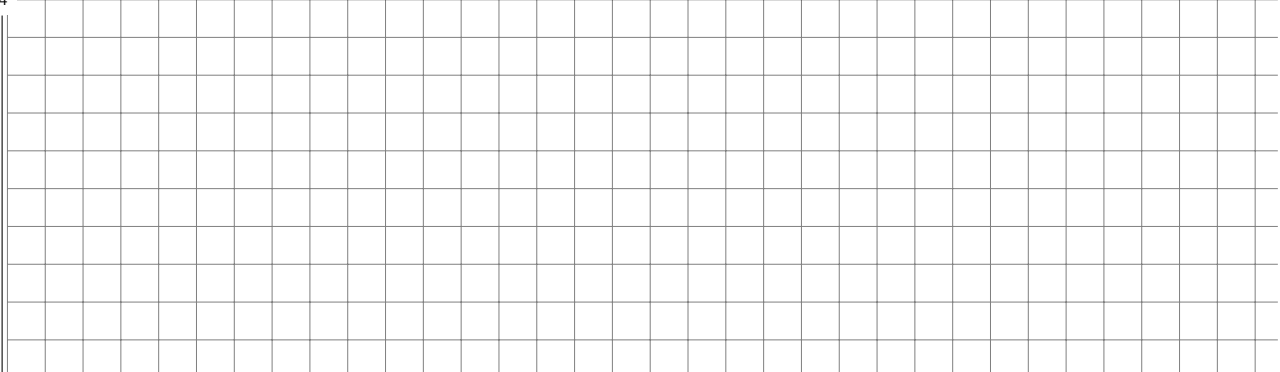
sich nichts Genaues sagen. Die Begründung liegt im Taylor-Polynom zweiten Grades. Zur Erinnerung das Taylor-Polynom für Funktionen einer Veränderlichen:

3.3



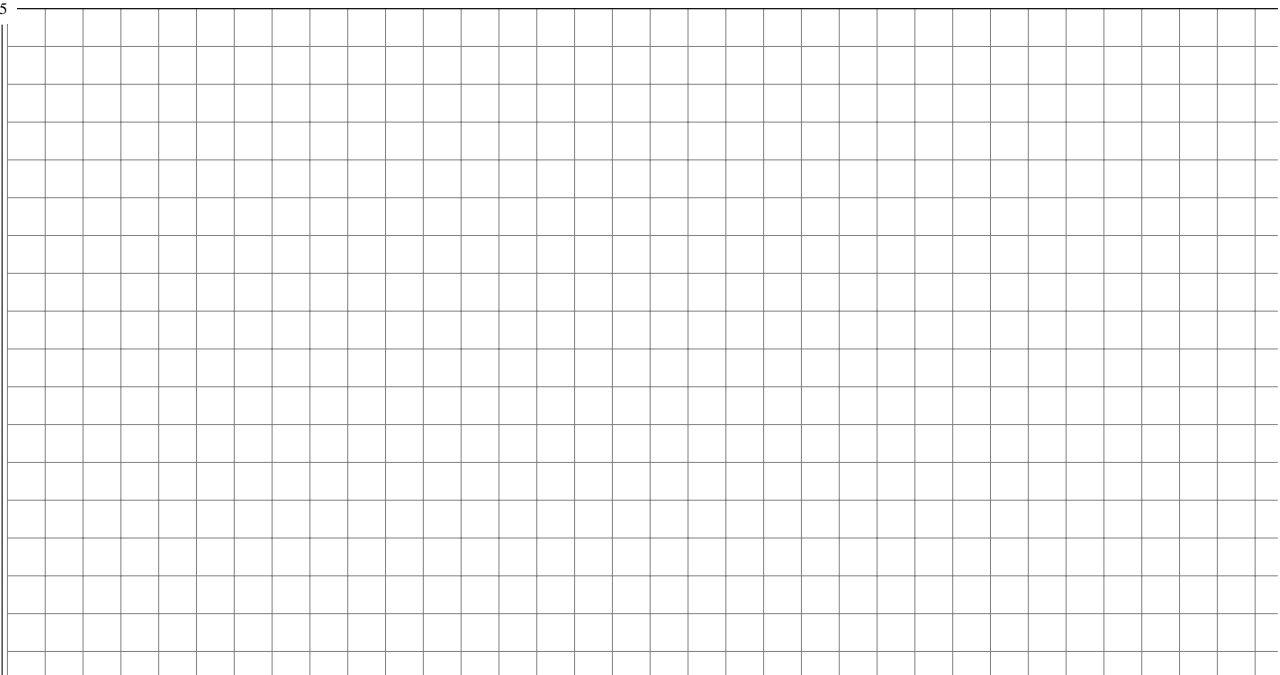
Analog gilt für Funktionen zweier Veränderlichen:

3.4



Kompakt lässt sich das mit dem Vektor  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  der Veränderlichen und mit Hilfe des Gradienten und der Hessematrix von  $f$  schreiben:

3.5



Der quadratische Term bestimmt, wie sich die Funktion an die Tangentialebene schmiegt.

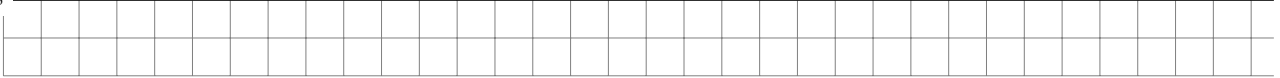
Für zwei Veränderliche gibt es ein einfaches Rezept, um die Vorzeichen der Eigenwerte ohne große Rechnung zu prüfen: Die Eigenwerte einer symmetrischen  $2 \times 2$ -Matrix sind genau dann beide positiv oder beide negativ, wenn für die Determinante der Matrix  $D > 0$  gilt. Ist das der Fall, entscheidet das Vorzeichen des linken oberen Eintrags der Matrix, ob beide Eigenwerte positiv oder negativ sind. Das Prüfen auf ein lokales Maximum an  $(x_0, y_0)$  sieht als Rezept so aus:





### 3 Extremwertrechnung

das heißt, es ist das Minimum folgender Funktion gesucht:

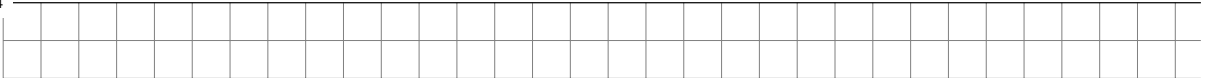
3.13 

was sich mit dem oben genannten Verfahren lösen lässt.

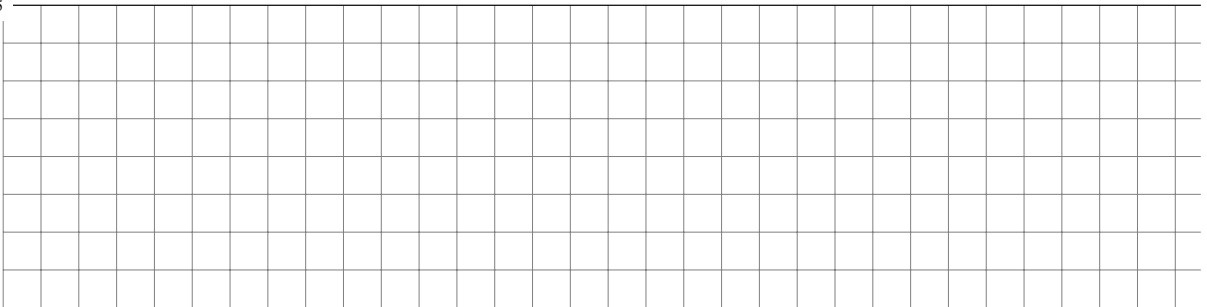
### 3.3 Extremwertaufgaben mit nicht explizit auflösbaren Nebenbedingungen

In manchen Fällen, zum Beispiel falls sich die Nebenbedingung  $\varphi(x, y) = 0$  nicht explizit auflösen lässt, behilft man sich mit einem Trick: mit der *Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren*. Rezept:

1. Hilfsfunktion  $F(x, y, \lambda)$  mit Lagrangeschen Multiplikator  $\lambda$  bilden:

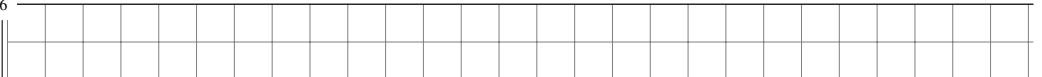
3.14 

2. Alle partiellen Ableitung 1. Ordnung von  $F(x, y, \lambda)$  bilden, gleich Null setzen und alle möglichen Extrempunkte  $(x_i, y_i)$  bestimmen:

3.15 

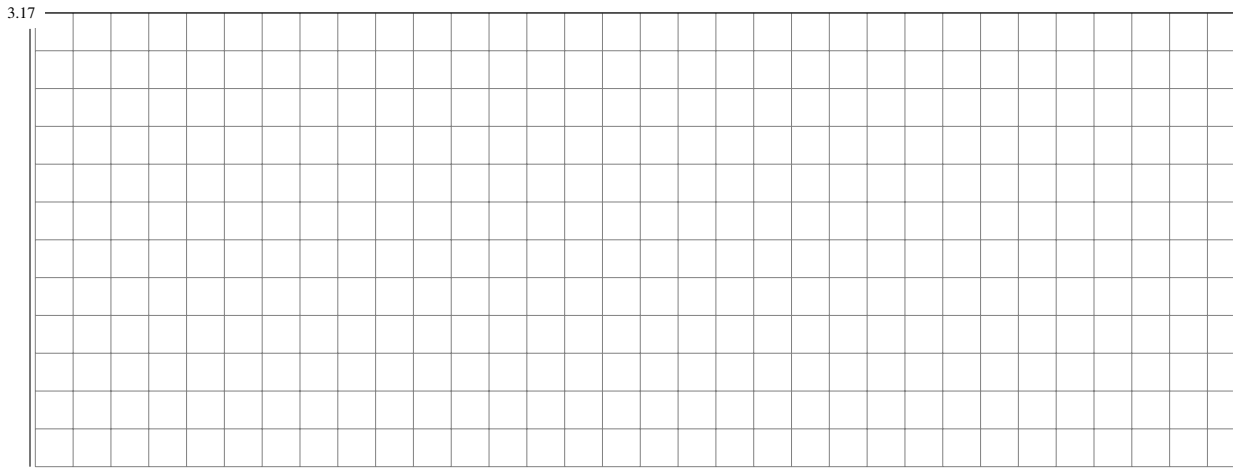
3. Die gefundenen Punkte in die Funktion einsetzen und die Stelle des Extremums bestimmen. (Es ließe sich auch die  $3 \times 3$ -Hessematrix aufstellen, um dann die Eigenwerte auf ihr Vorzeichen zu prüfen. Das ist allerdings nicht Inhalt dieser Vorlesung.)
4. Gegebenenfalls Randwerte überprüfen.

**Beispiel:** Maximiere  $f(x, y) = x + y$  mit der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 1$ , wir suchen also den größtmöglichen Wert von  $f(x, y)$  und die zugehörigen Werte  $(x, y)$ , die auch die Nebenbedingung  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  erfüllen.

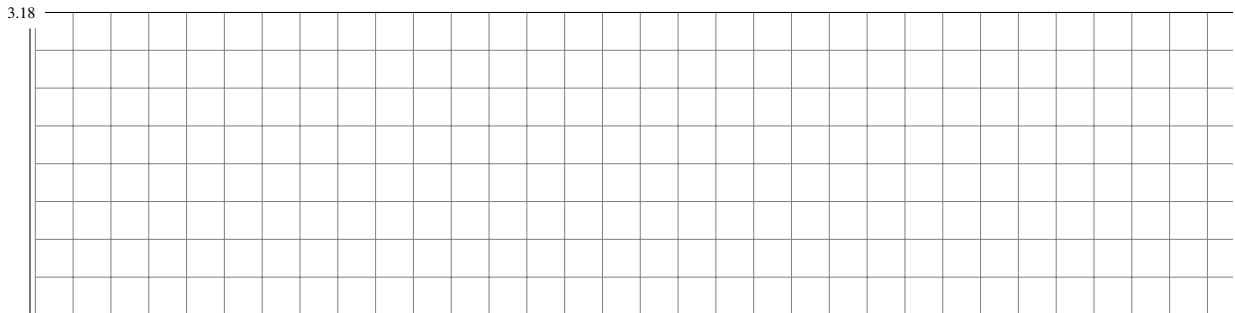
3.16 

1. Hilfsfunktion:

2. Partielle Ableitungen gleich Null setzen und Kandidaten bestimmen:



### 3. Einsetzen und Maximum bestimmen:



Diese Aufgabe lässt sich in MATLAB<sup>®</sup> veranschaulichen:

```
1 syms x y
2 ezsurf(x+y)
3 ezimplot3(x^2+y^2-1)
```

Der Befehl `ezimplot3d` gehört nicht zum Standardumfang von MATLAB<sup>®</sup>; er lässt sich von <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23623-ezimplot3-implicit-3d-functions-plotter> herunterladen.

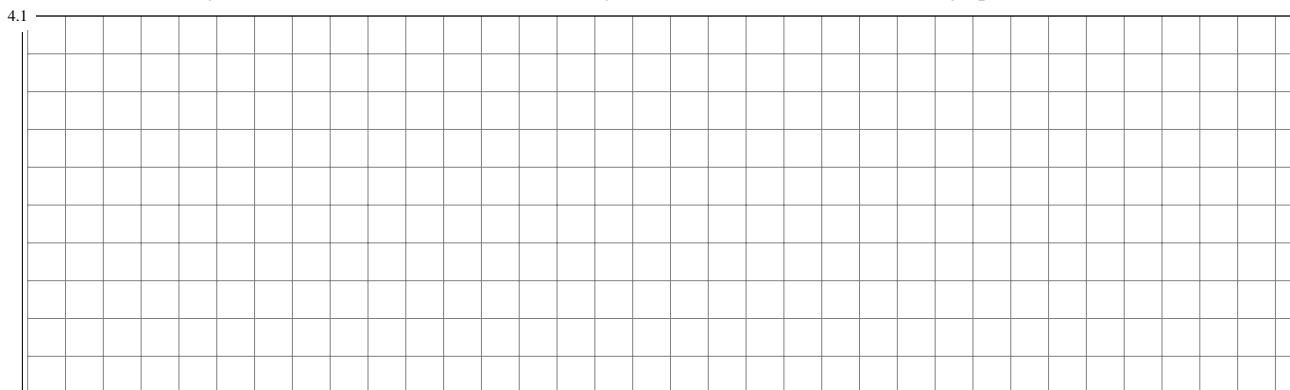
## 3.4 Übungsaufgaben

[Pap12a, S.332ff], [Pap10, Kapitel E, alle Aufgaben zu Abschnitt 2]

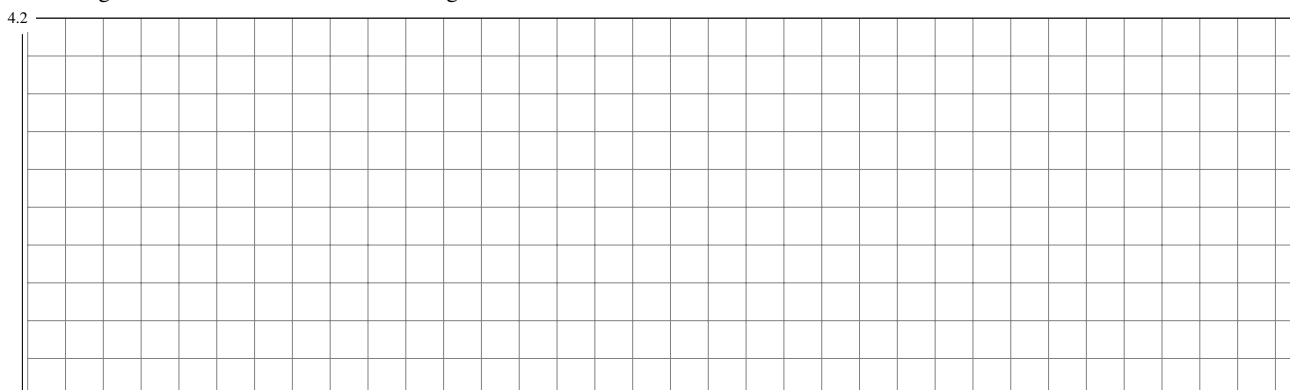
## 4 Mehrdimensionale Integrale

### 4.1 Mehrdimensionale Integrale

Das bestimmte Integral einer Funktion *einer* Veränderlichen gibt die Fläche unter dem Funktionsgraphen an, samt Vorzeichen:

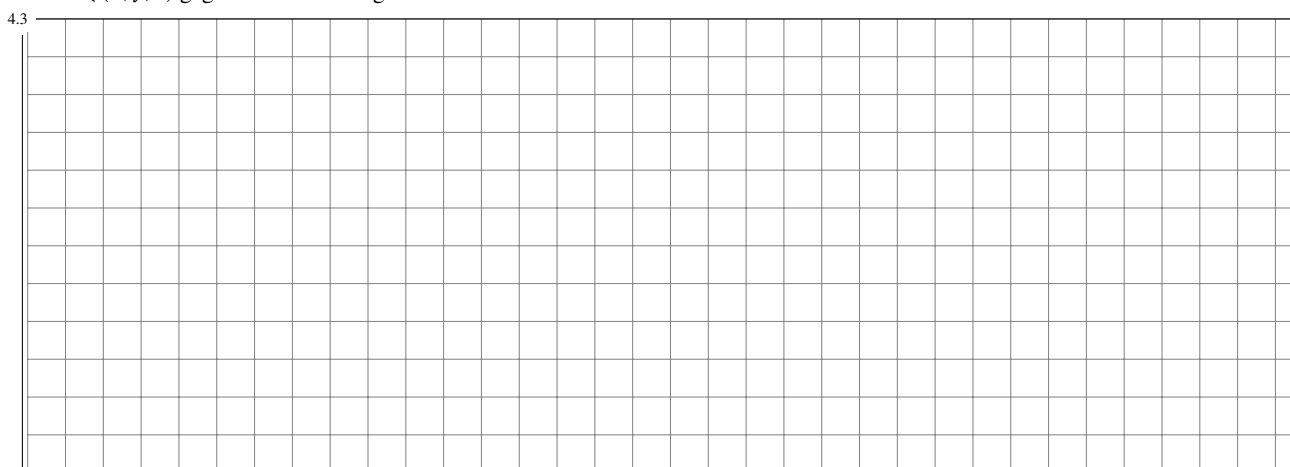


Entsprechend gibt das Integral einer Funktion *zweier* Veränderlicher das *Volumen* unter dem Funktionsgraphen an, samt Vorzeichen. Der Integrationsbereich ist nun eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ :



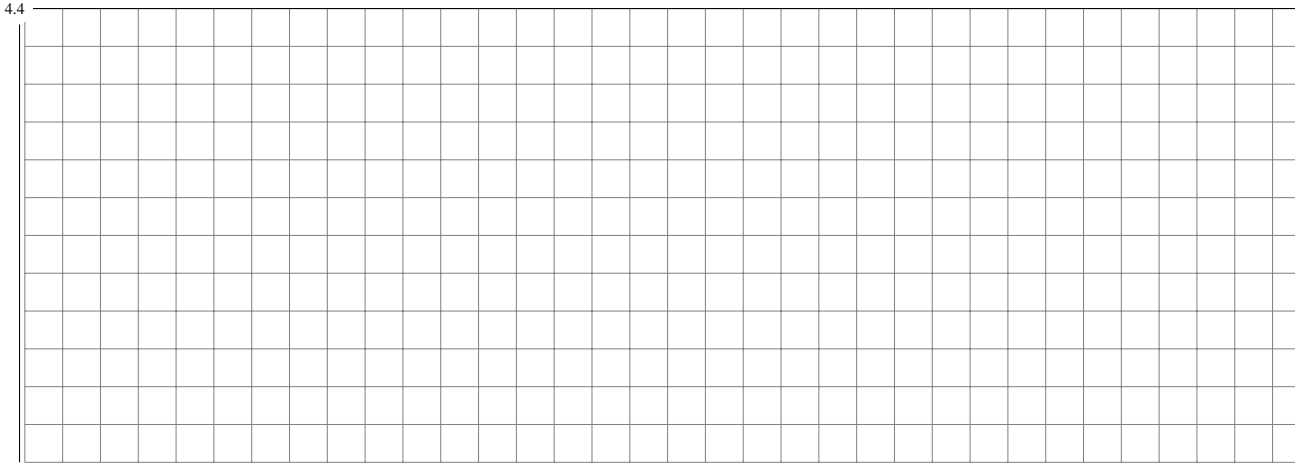
Anmerkung: Unbestimmte Integrale = Stammfunktionen betrachtet man praktisch nur bei Funktionen einer Veränderlichen. Deshalb sagt man bei mehrdimensionalen Integralen nicht ausdrücklich *bestimmtes* Integral.

Integrale von Funktionen dreier Veränderlicher haben eine entsprechende Bedeutung: Das vierdimensionale (Hyper-)Volumen unter einem dreidimensionalen Volumen im  $\mathbb{R}^3$  ist allerdings nicht leicht darzustellen. Was man in der Anwendung häufig findet ist das Integral über drei Variablen im Sinne einer Summe oder eines Mittelwerts. Zum Beispiel könnte von einem Stoff eine ortsabhängige Dichte  $\rho(x, y, z)$  gegeben sein. Dann gilt für die Gesamtmasse  $M$ :

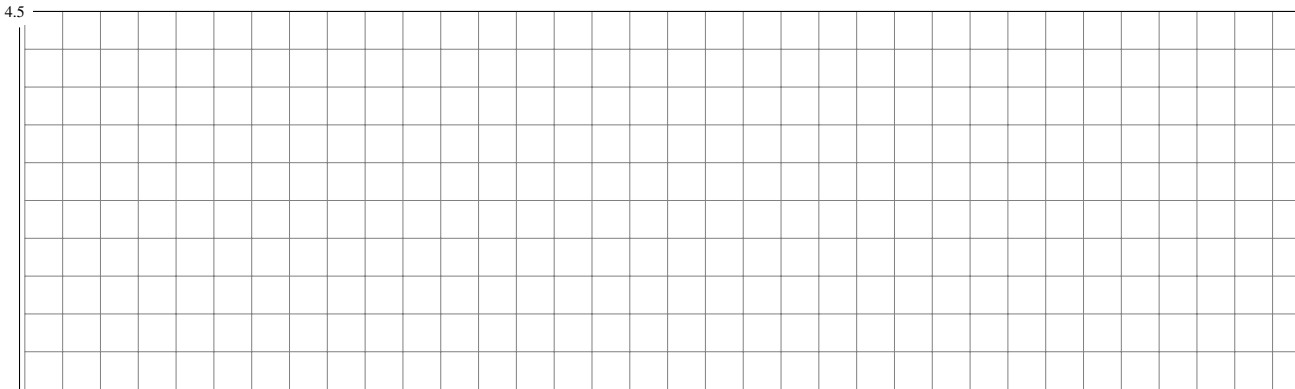


## 4.2 Berechnung kartesischer Mehrfachintegrale

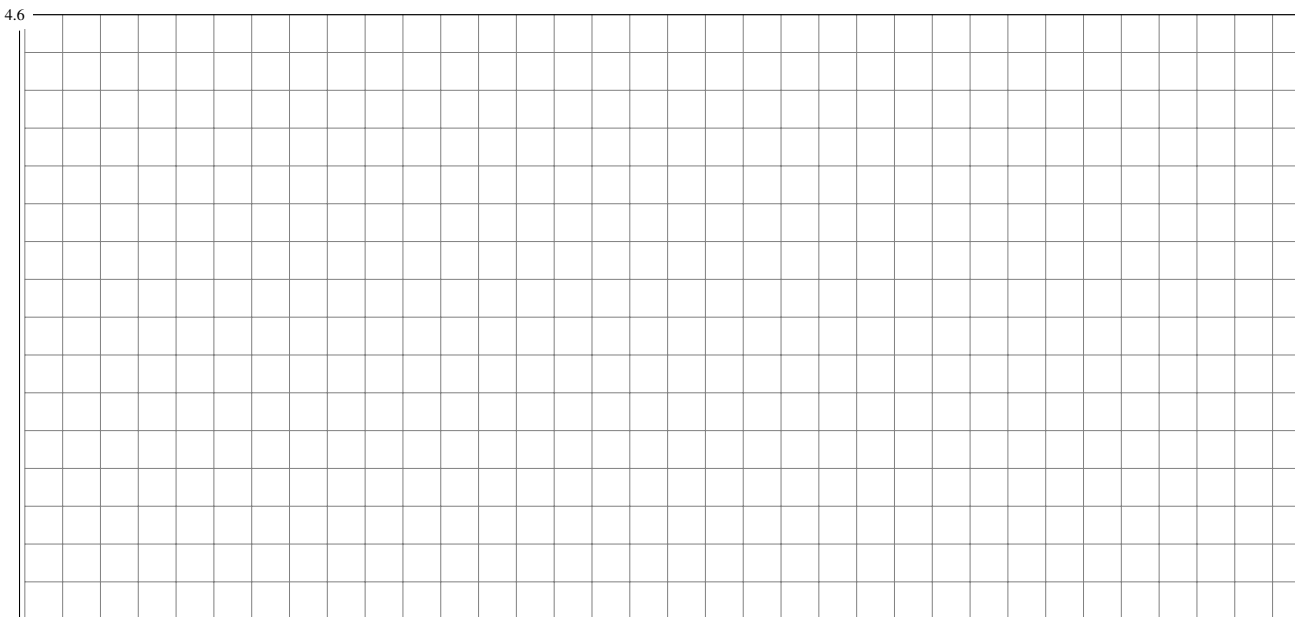
Angenommen, die Funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2$  soll über das Dreieck zwischen den Punkten  $(0|0)$ ,  $(1|0)$  und  $(0|1)$  integriert werden. Gesucht ist also das Volumen eines dreieckigen Tortenstücks unter dem Paraboloid:



Der übliche Trick besteht nun darin, den Integrationsbereich (das heißt das Dreieck) längs der  $x$ - oder der  $y$ -Achse in Salamischeiben zu schneiden, zum Beispiel so:



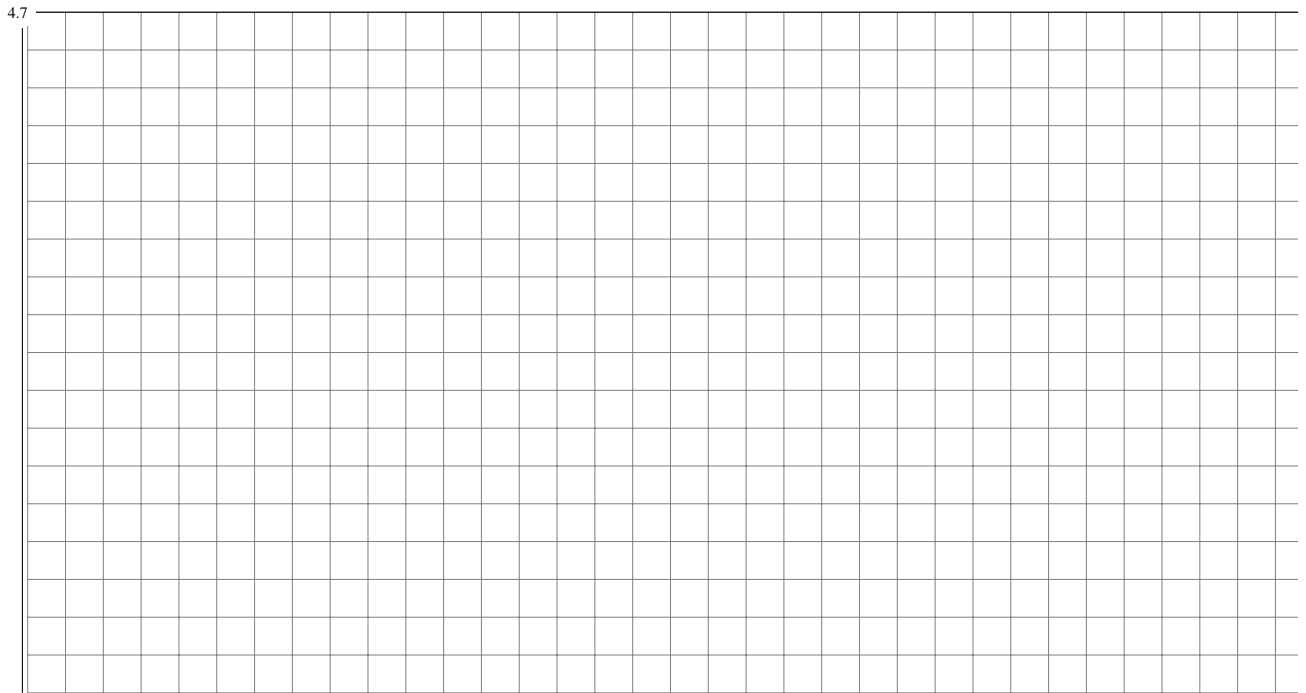
und dann das Mehrfachintegral in ein eindimensionales Integral eines eindimensionalen Integrals umzuwandeln, bei dem gegebenenfalls die Grenzen des inneren Integrals von der Variablen des äußeren Integrals abhängen.



Entsprechend bei Funktionen von drei und mehr Veränderlichen.

### 4.3 Anwendungen

Mehrfachintegrale lassen sich verwenden, um zum Beispiel folgende Größen zu berechnen: Flächeninhalt:



Schwerpunkt einer Fläche:



Flächenträgheitsmomente:

4.9

A large grid for calculations, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares. The grid is intended for determining area moments of inertia.

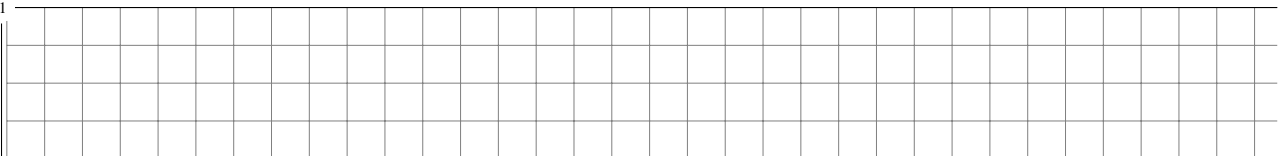
Volumen eines Körpers:

4.10

A large grid for calculations, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares. The grid is intended for determining the volume of a body.

Schwerpunkt eines Körpers

4.11

A grid for calculations, consisting of 20 columns and 10 rows of small squares. The grid is intended for determining the center of mass of a body.

#### 4.4 Übungsaufgaben

[Pap12a]: S.338ff, Aufgaben 1, 3, 7, 9, 10, 11, 14, 15 [Pap10]: S.301ff, Kapitel F, alle Aufgaben in den Unterkapiteln 1.1 *Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten* und 2.1 *Dreifachintegrale in kartesischen Koordinaten*.

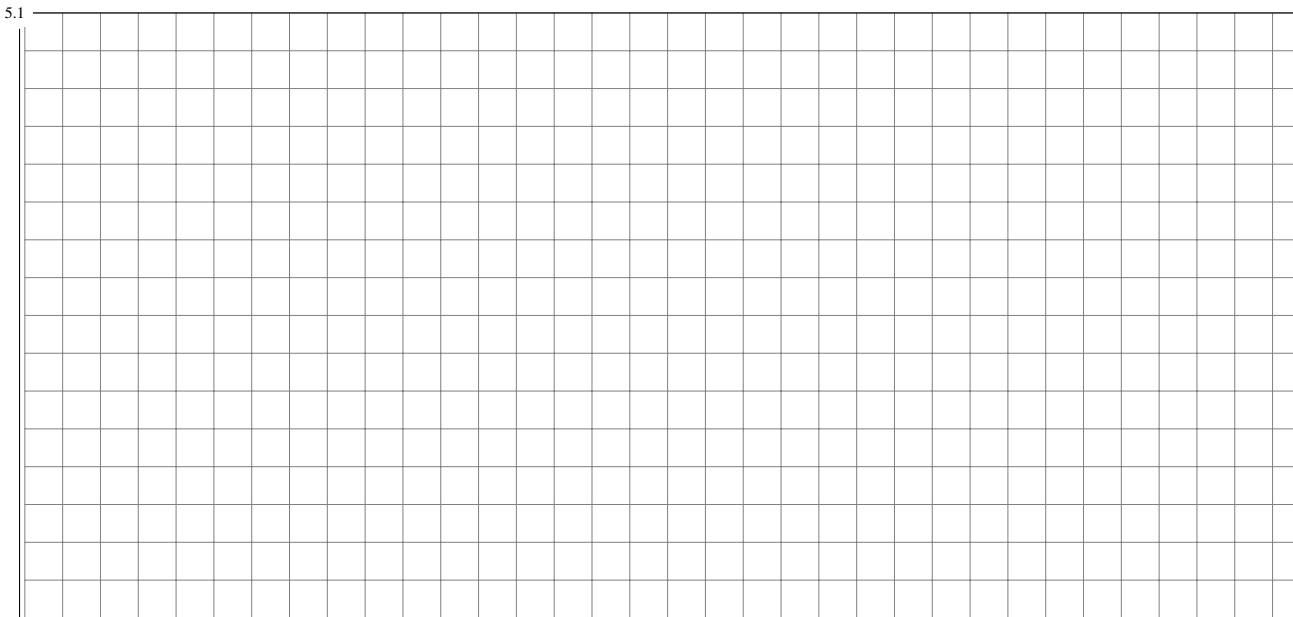


## 5 Koordinatensysteme

### 5.1 Polar-, Zylinder und Kugelkoordinaten

#### 5.1.1 Motivation

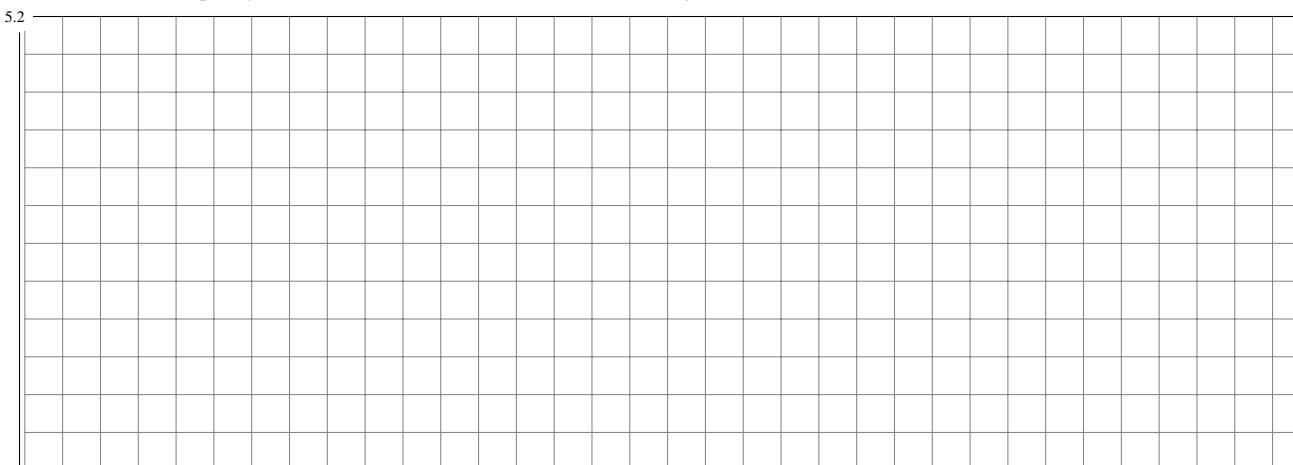
Sachverhalte, die eine Struktur von Zeilen und Spalten zeigen, lassen sich in kartesischen (von René Descartes = Renatus Cartesius) Koordinaten anschaulich und übersichtlich beschreiben, zum Beispiel wird in der Physik die  $x$ -Achse häufig zur Darstellung der Zeit  $t$  als unabhängige Variable verwendet, während die  $y$ -Achse die zeitlich veränderliche Größe repräsentiert. Viele andere Sachverhalte sind aber kreis-, zylinder- oder kugelförmig:



Dafür sind die im Folgenden beschriebenen *krummlinigen* Koordinatensysteme besser als kartesische Koordinatensysteme geeignet!

#### 5.1.2 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten kennen Sie schon von den komplexen Zahlen: Statt einen Punkt im  $\mathbb{R}^2$  als  $(x, y)$  zu bestimmen, lässt sich auch sein Abstand  $r$  vom Ursprung und der Winkel „Azimut“  $\varphi$  zur  $x$ -Achse angeben:



## 5 Koordinatensysteme

Achtung: Der Winkel  $\varphi$  ist mit Vorsicht zu genießen:

5.3

Entsprechendes gilt für die Winkel im Folgenden!  
Umrechnung von polar nach kartesisch:

5.4

Umrechnung von kartesisch nach polar:

5.5

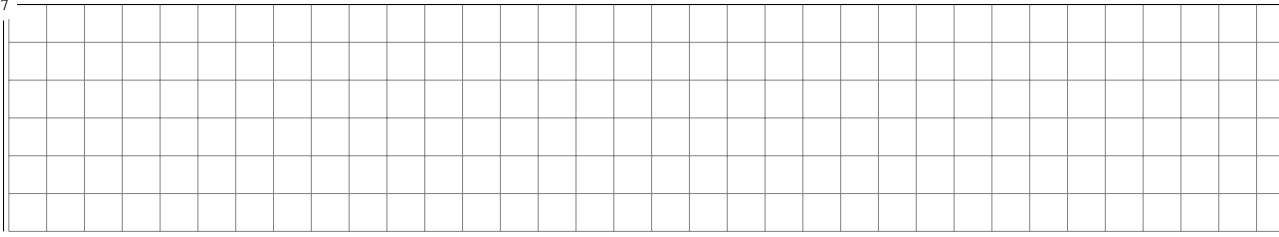
### 5.1.3 Zylinderkoordinaten

Zu den Polarkoordinaten in der  $xy$ -Ebene lässt sich die übliche  $z$ -Achse dazugeben und man hat damit ein Koordinatensystem für den  $\mathbb{R}^3$ , die Zylinderkoordinaten:

5.6

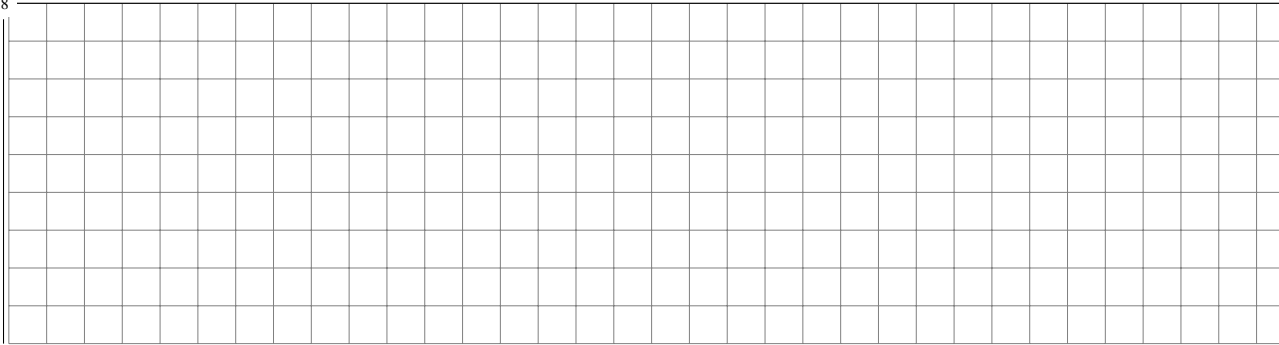
Umrechnung von zylindrisch in kartesisch:

5.7



Umrechnung von kartesisch nach zylindrisch:

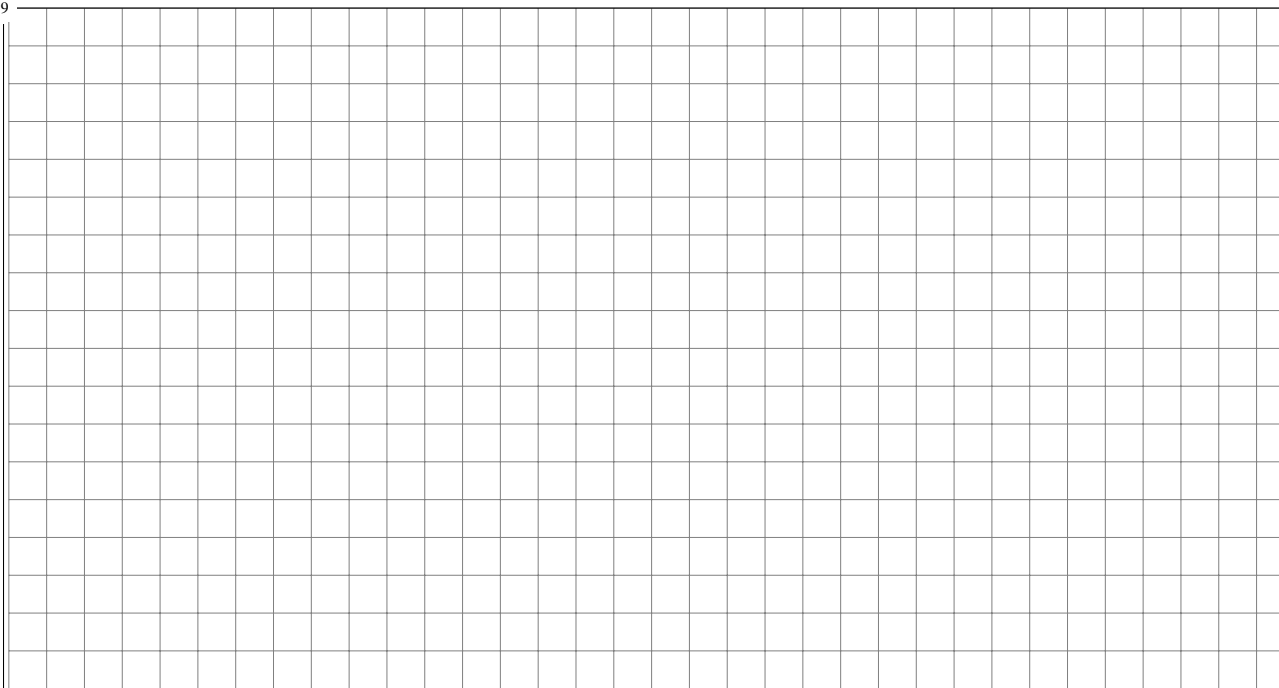
5.8



Was „passiert“, wenn man in einer Funktion  $z = f(x)$  die Koordinate  $x$  durch die Zylinderkoordinate  $r$  ersetzt? Das Ergebnis ist eine Rotationsfläche.

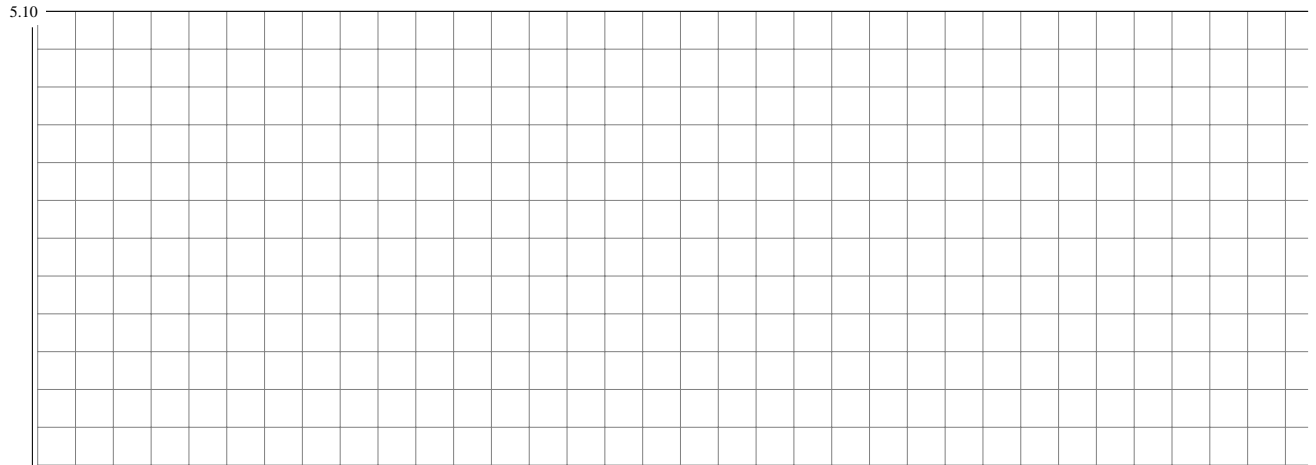
**Wichtig:** Dies gilt auch für die implizite Darstellung  $F(x, z) = 0$  (siehe [Pap12a, S.341, Aufgabe 22]). Graphisch:

5.9

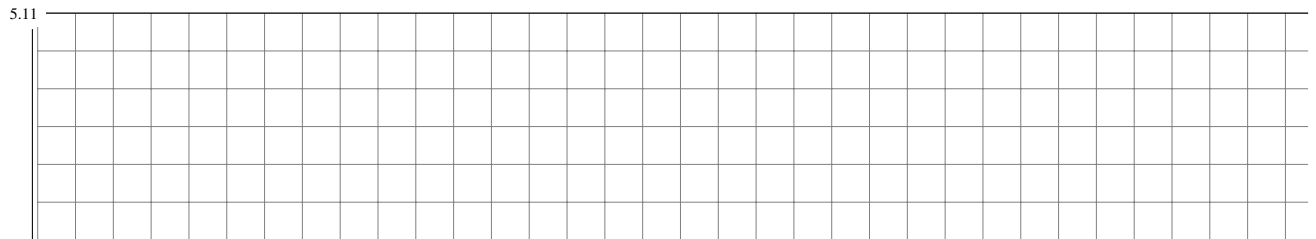


### 5.1.4 Kugelkoordinaten

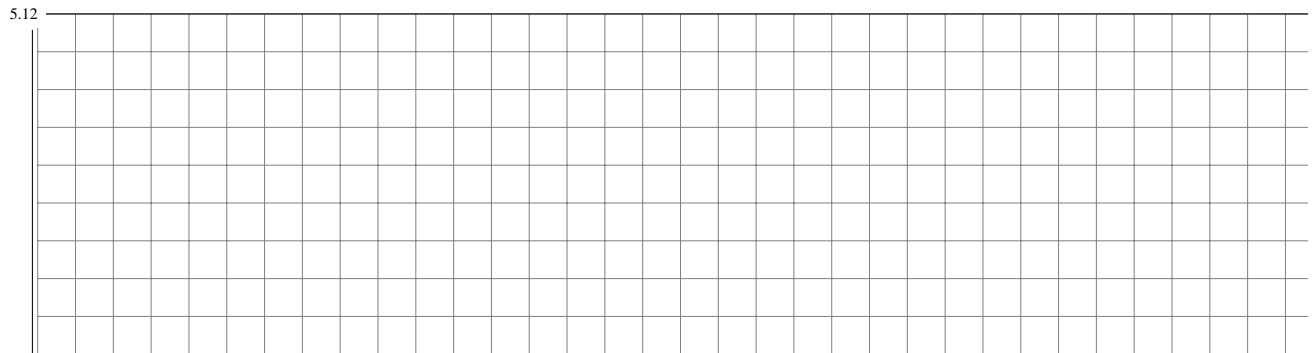
Die Kugelkoordinaten = sphärischen Koordinaten sind eine andere Erweiterung der Polarkoordinaten ins Dreidimensionale. Statt der kartesischen  $z$ -Koordinate kommt der Polwinkel = Zenitwinkel  $\vartheta$  zur positiven  $z$ -Achse hinzu. Eine andere Möglichkeit ist,  $\vartheta$  als Höhenwinkel = Elevation zur  $xy$ -Ebene zu messen; das wird zum Beispiel für das interne Koordinatensystem bestimmter Radarsensoren im Fahrzeug verwendet.



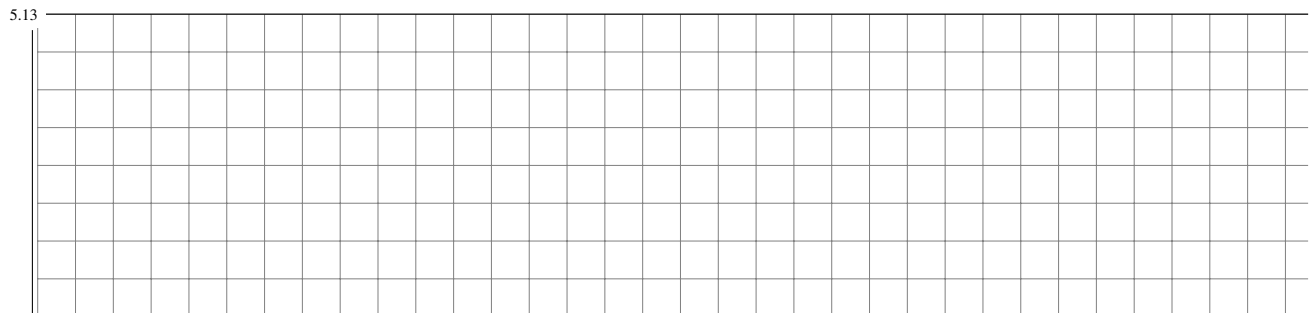
Der übliche Wertebereich von  $\vartheta$  ist damit



Umrechnung von sphärisch nach kartesisch:

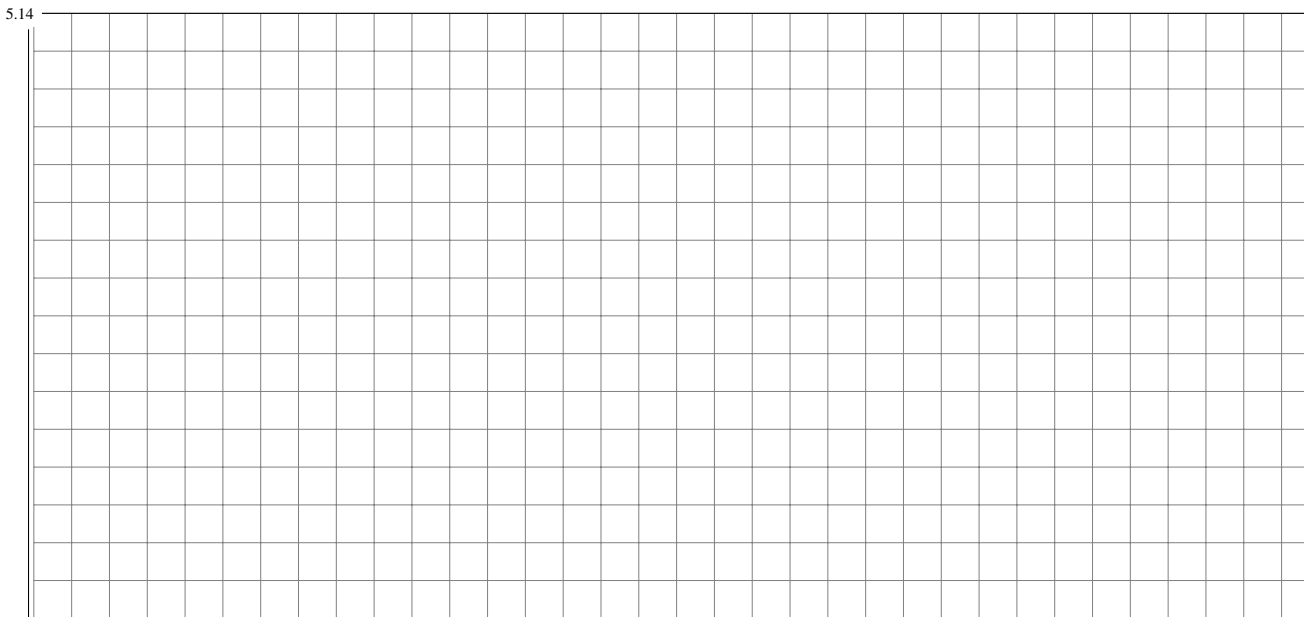


Umrechnung von kartesisch nach sphärisch:

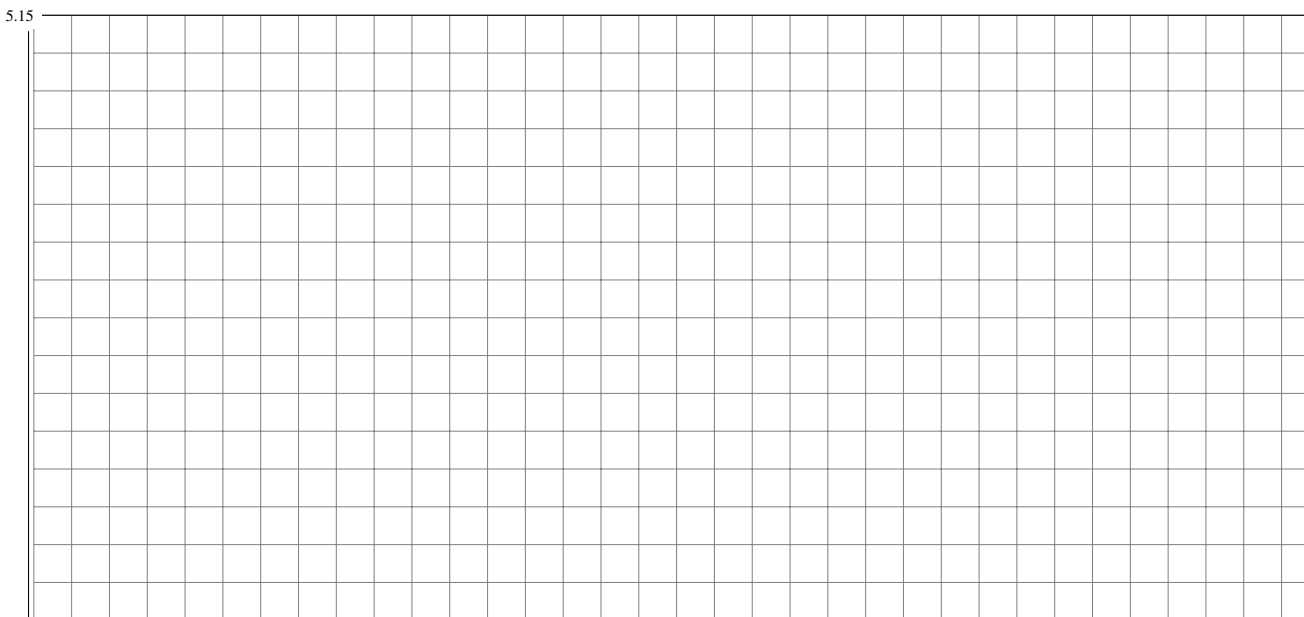


## 5.2 Integration in Polarkoordinaten

Bei zum Beispiel kreisförmigen Funktionen ist es häufig einfacher, die Funktion  $f$  und den Integrationsbereich in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  anzugeben und über  $r$  und  $\varphi$  statt über  $x$  und  $y$  zu integrieren. Die Integration lässt sich als Grenzfall einer Summe vorstellen: man summiert in kartesischen Koordinaten hohe oder tiefe Quader mit kleiner quadratischer Grundfläche  $dx dy$  und Höhe  $f(x, y)$ . Bei Polarkoordinaten sind die Grundflächen dagegen kleine Sektoren von Kreisringen. Die Fläche eines solchen Stücks ist nicht  $dr d\varphi$ , sondern verlangt einen Korrekturfaktor:



So lässt sich zum Beispiel die Fläche der Kreisscheibe mit Radius  $R$  um den Ursprung bestimmen:

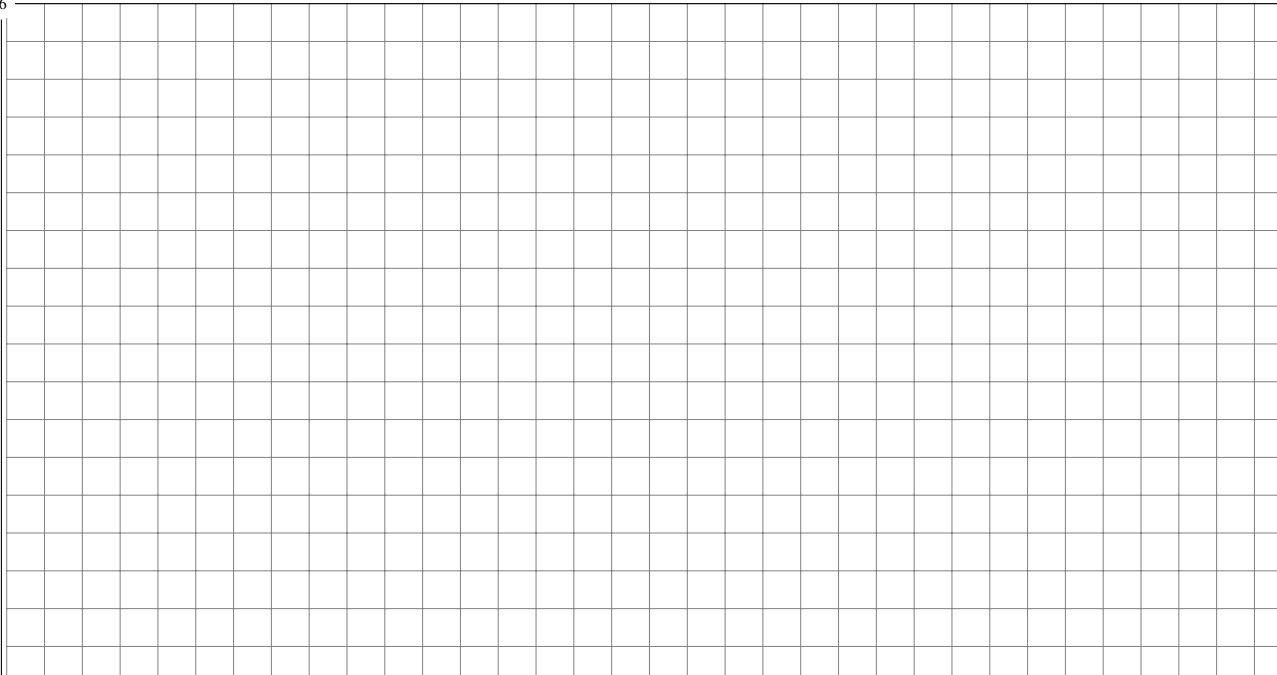


In Zylinderkoordinaten ist derselbe Korrekturfaktor nötig.

### 5.3 Integration in Kugelkoordinaten

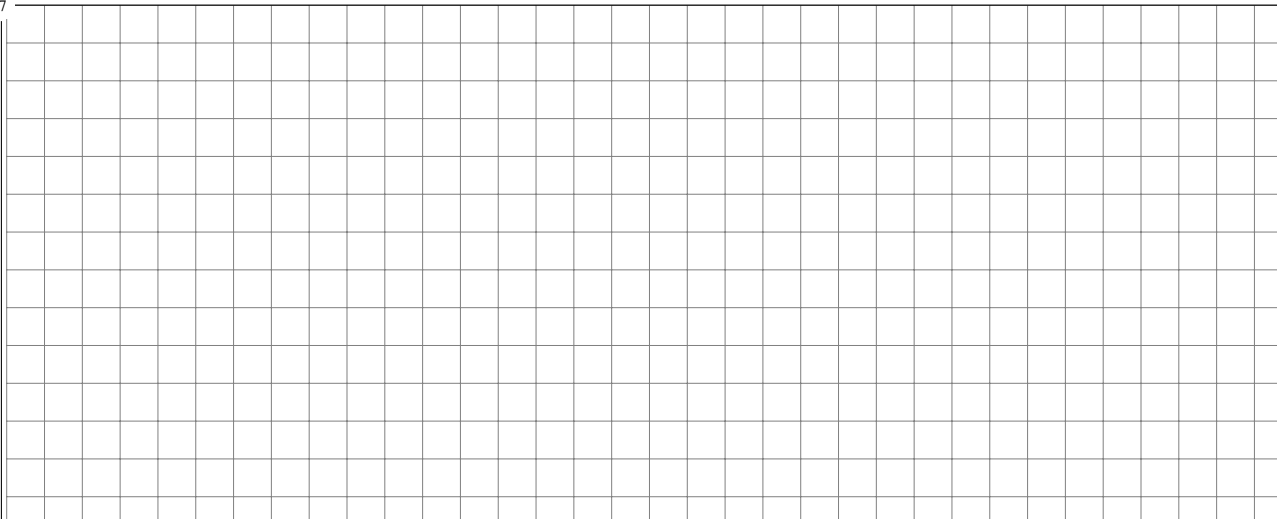
Bei Integration über Kugelkoordinaten hat man es nicht mehr wie im kartesischen Fall mit Würfeln, sondern mit runden Stückchen zu tun. Das Volumen eines solchen Stücks ist nicht  $dr d\vartheta d\varphi$ , sondern verlangt einen Korrekturfaktor:

5.16



So lässt sich zum Beispiel das Volumen einer Kugel mit Radius  $R$  um den Ursprung bestimmen:

5.17



### 5.4 Übungsaufgaben

[Pap12a, S.338ff, Aufgaben 4, 5, 6, 8, 12, 13, 16, 19 bis 25], [Pap10]: S.301ff, Kapitel F, alle Aufgaben im Unterkapitel 1.2 *Doppelintegrale in Polarkoordinaten*, sowie die Aufgaben F40 bis F48 im Unterkapitel 2.2 *Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten*.



### 6.1.3 Inhomogene lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Nun eine inhomogene Variante derselben Differentialgleichung:

$$y'(x) + 5y(x) = x^2$$

Man sucht nun zunächst eine *spezielle (partikuläre)* Lösung  $y_p$  dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung, also irgendeine Lösung zu irgendeinem Anfangswert. Trick: suche eine spezielle Lösung  $y_p$ , addiere allgemeine Lösung  $y_h$ .

6.5

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu finden, addiert man eine spezielle Lösung  $y_p$  (wie die eben gefundene) der inhomogenen Differentialgleichung zu einer allgemeinen Lösung  $y_h$  der homogenen Differentialgleichung (auch bereits bekannt):

6.6

### 6.1.4 Variation der Konstanten

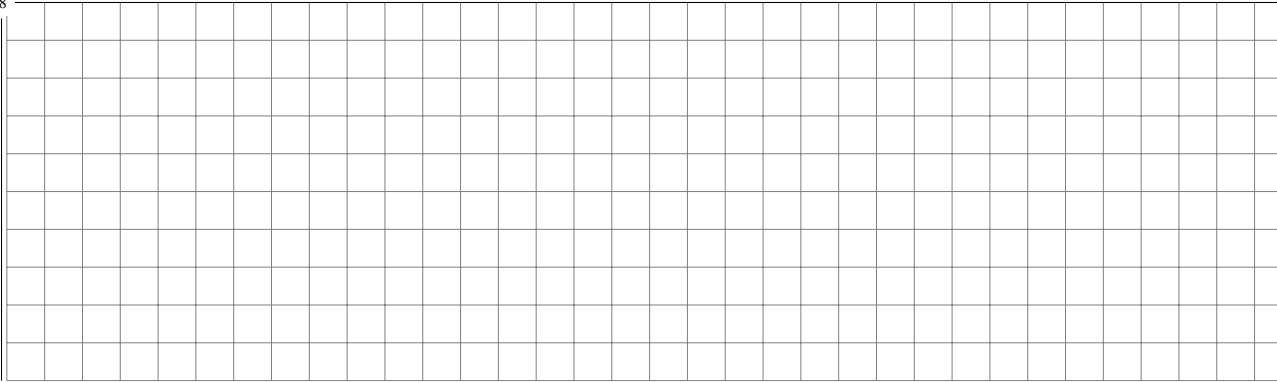
Eine andere Art, die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zu finden, ist die *Variation der Konstante*: Man setzt die Integrationskonstante der homogenen Differentialgleichung als Funktion statt als Konstante an. Konstante  $A$  als Funktion  $A(x)$ :

6.7



Partielle Integration:

6.8



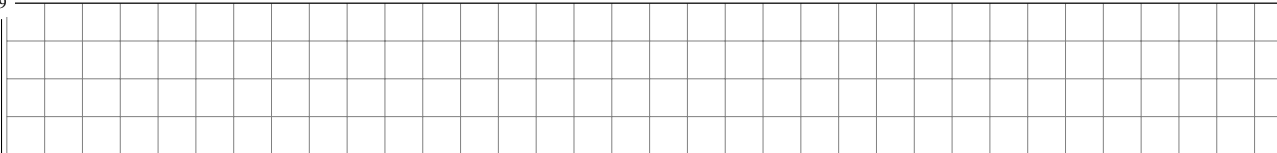
Achtung: Dies geht nur bei erster Ordnung!

## 6.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### 6.2.1 Homogene lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

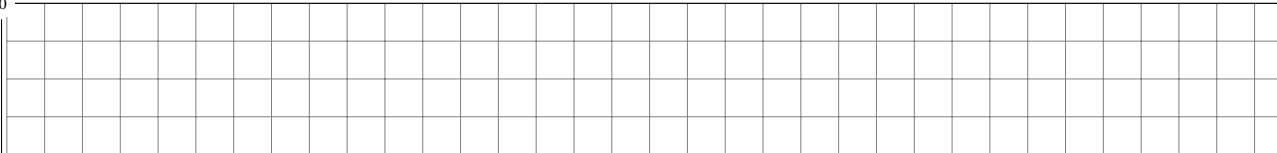
Der Prototyp für homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist das Federpendel mit Auslenkung  $x$  zur Zeit  $t$ , Masse  $m$ , Federkonstante  $C$  und Reibungskonstante  $r$ :

6.9



Welche Größen muss man als Anfangsbedingung angeben?

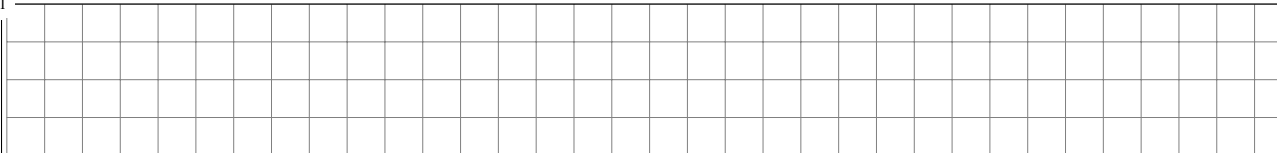
6.10



### 6.2.2 Lösung durch Ansatz

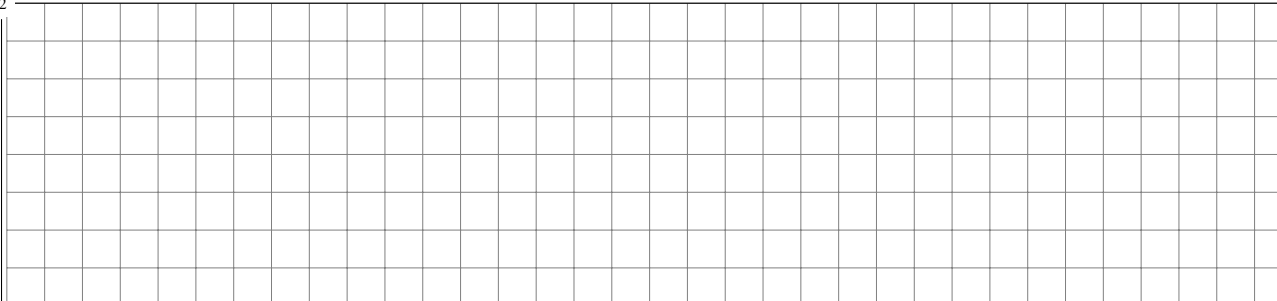
Ansatz mit Hilfe der komplexen Konstanten  $\lambda$ :

6.11



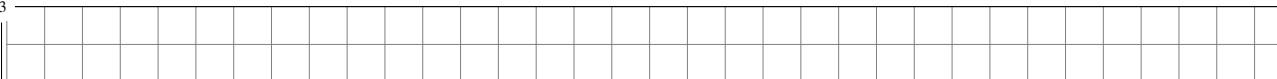
Dann muss für  $\lambda$  gelten:

6.12



Es ergeben sich also typischerweise *zwei* verschiedenen Lösungen  $\lambda_{1,2}$ . Was passiert, wenn die  $\lambda_{1,2}$  einen imaginären Anteil haben?

6.13







## 7 Laplace-Transformation zur Lösung von linearen Differentialgleichungen

### 7.1 Einleitung

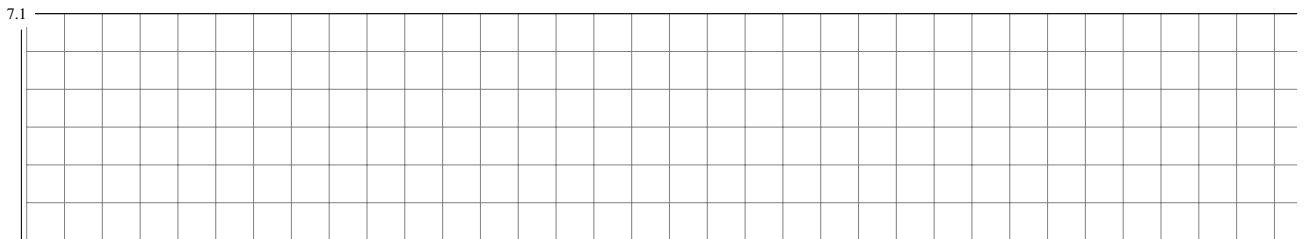
Wenn man in die inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{x} + ax = u(t)$$

als Anregung

$$u(t) = U_0 e^{st}$$

mit konstantem  $U_0$  und der (im Allgemeinen komplexen) Variablen  $s = a + ib$  einsetzt, dann ergibt sich die partikuläre Lösung mit dem Ansatz  $x_p(t) = X_0 e^{st}$ . Man könnte nun wie im letzten Kapitel einfach erst die homogene Lösung  $x_h$  berechnen, den Ansatz für  $x_p(t)$  in die Differentialgleichung einsetzen und nach  $X_0$  auflösen, um die Lösung  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  zu bestimmen. Wir berechnen hier aber den Quotienten  $\frac{X_0}{U_0}$ :



Der Quotient lässt sich als *Übertragungsfunktion*  $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$  auffassen, die sich aus der *Laplace-Transformierten* dieser Differentialgleichung ergibt. Der Laplace-Transformations-Operator wird mit einem geschwungenen  $\mathcal{L}$  bezeichnet, man schreibt allgemein  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ . Die Laplace-Transformation ist definiert als

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Die Laplace-Transformierte wird mit Großbuchstaben bezeichnet, die Laplace-Transformierte von  $x(t)$  ist also

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Berechnen wir die Laplace-Transformierte von  $\dot{x}$ , also  $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\}$ :

7.2

Der Differentialoperator  $\mathcal{D}_t$  lässt sich somit durch  $s$  ersetzen<sup>1</sup> und damit eine lineare Differentialgleichung im *Zeitbereich* in den *Bildbereich* transformieren. Für eine bestimmte Anregungsfunktion  $u(t)$  lässt sich die Lösung zunächst im *Bildbereich* durch Auflösen nach  $X(s)$  berechnen. Die Lösung im *Zeitbereich* ist dann

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{U(s) \cdot G(s)\}$$

Es gibt noch zwei wichtige Punkte, die uns fehlen, um lineare Differentialgleichung auf diese Art zu lösen:

7.3

## 7.2 Laplace-Transformierte verschiedener Funktionen

Die einfachste Anregungsfunktion  $u(t)$  ist die Sprungfunktion  $h(t)$ :

7.4

<sup>1</sup>Anfangsbedingungen  $x(0) \neq 0$  entsprechend berücksichtigen.



Partialbruchzerlegung:

7.8

Die Rücktransformation und damit die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist dann wegen der Linearitätseigenschaft (siehe Tabelle A.1)

7.9

Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass sich dieselbe Lösung ergibt, wenn man
  - a) die homogene und die partikuläre Lösung  $x_h$  und  $x_p$  respektive bestimmt, und
  - b) die Lösung mit Hilfe der entsprechenden Korrespondenz in der Tabelle in [Pap12a, Seite 657f, Kapitel 4.2] bestimmt.
2. Lösen Sie die Differentialgleichung  $\dot{x} + x = 0$ ,  $x(0) = 1$  mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösungen:

7.10

**Wichtig:** Voraussetzung für die Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation ist, dass die linke und rechte Seite der Differentialgleichung  $= 0$  für  $t < 0$  ist!

## 7.5 Übungen

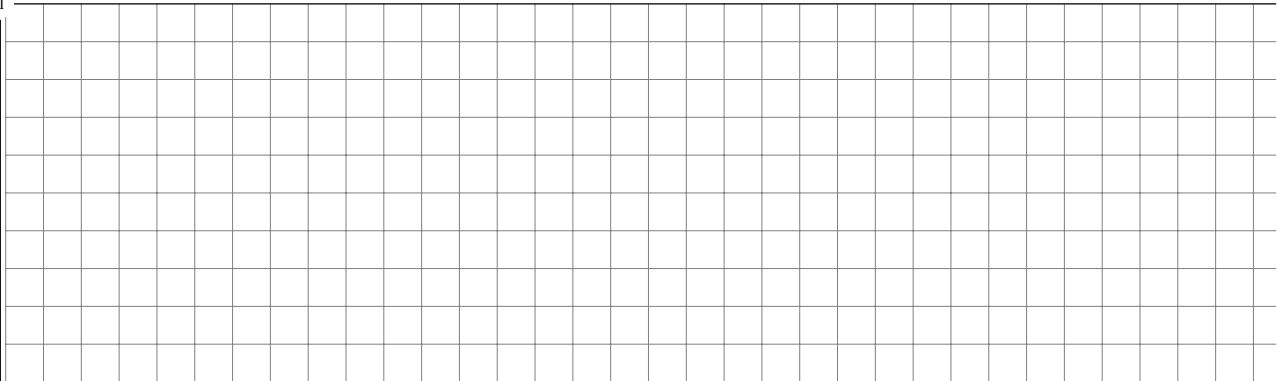
[Pap12b, Seite 680ff]: Alle Aufgaben zu Abschnitt 1, 2, 4 und 5.

# 8 Lineare Differentialgleichungssysteme und Fundamentalmatrix<sup>1</sup>

## 8.1 Transformation in ein DGL-System 1. Ordnung

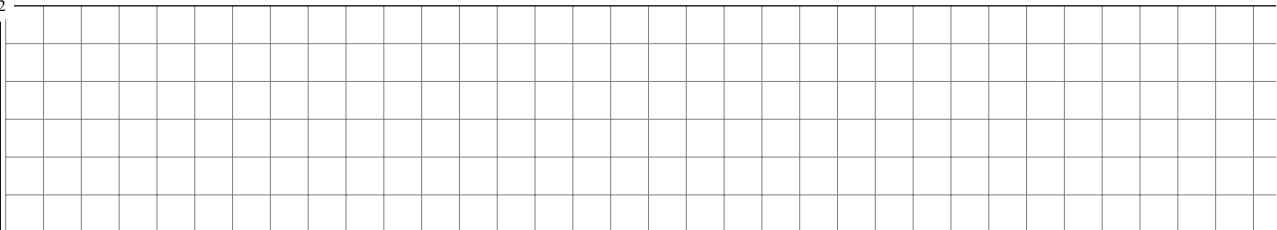
In der Zustandsraummethode der Regelungstechnik und zur numerischen Lösung werden Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung transformiert. Für ein lineares System zweiter Ordnung  $m\ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + cy(t) = u(t)$  ergibt sich

8.1



Dieses Gleichungssystem lässt sich in Matrizenschreibweise darstellen:

8.2

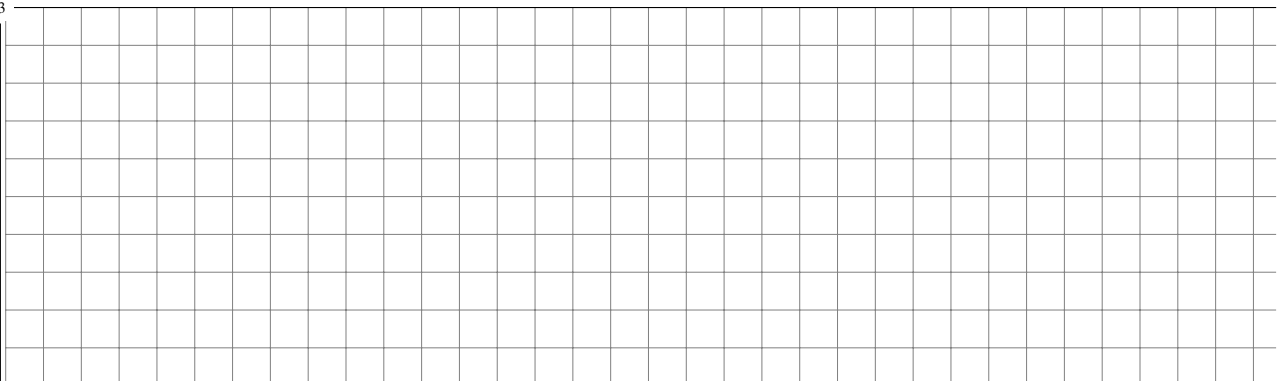


Nichtlineare Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung müssen in der Form

$$y^{(n)}(t) + f(y(t), \dot{y}(t)\ddot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t)) = 0$$

vorliegen, damit sie in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung transformiert werden können:

8.3



Numerische Integrationsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen (zum Beispiel Runge-Kutta-Verfahren) verlangen häufig, dass die Differentialgleichungen als System 1. Ordnung vorliegen, so dass man zur numerischen Simulation ggf. das hier vorgestellte Verfahren zur Transformation anwenden muss. Im Folgenden wird es hier nur noch um lineare Differentialgleichungen gehen.

---

<sup>1</sup>Dieses Kapitel basiert auf [Unb07, Seite 6ff]

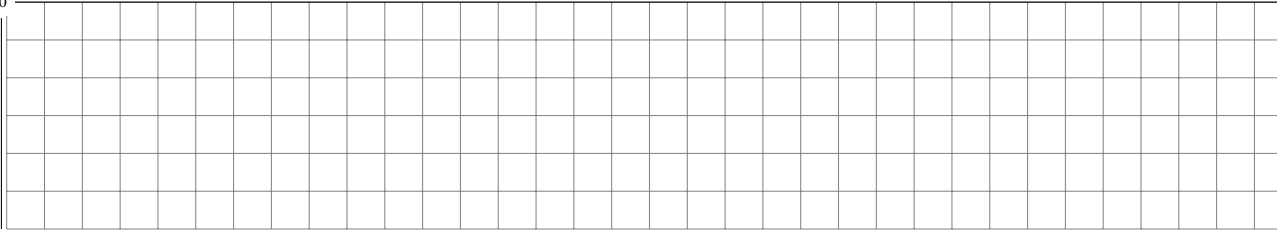




### 8.3 Lösung im Bildbereich zur Bestimmung der Fundamentalmatrix

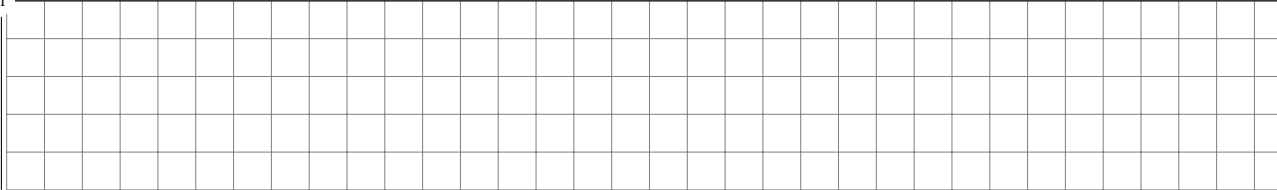
Die Laplace-Transformation der vektoriellen Darstellung in Lücke 8.2 ergibt

8.10



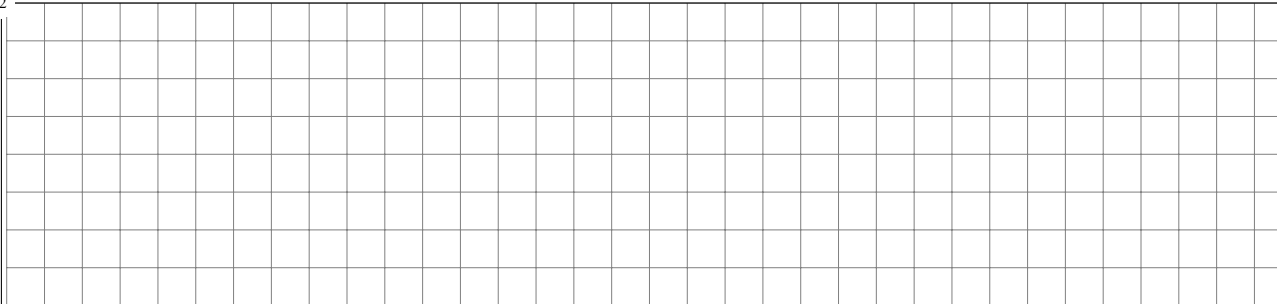
Wenn Sie die Ergebnisse in den Lücken 8.9 und 8.10 vergleichen folgt unmittelbar für die Fundamentalmatrix

8.11



Für Systeme 2. Ordnung mit einer Systemmatrix  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  lässt sich die Fundamentalmatrix dann folgendermaßen berechnen:

8.12



**Beispiel:** Gegeben sei die Systemmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

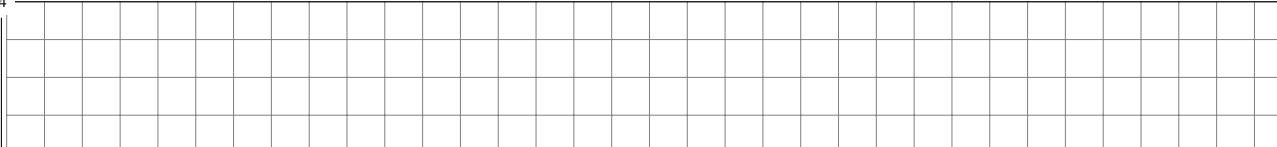
Dann ergibt sich für die Fundamentalmatrix im Bildbereich

8.13



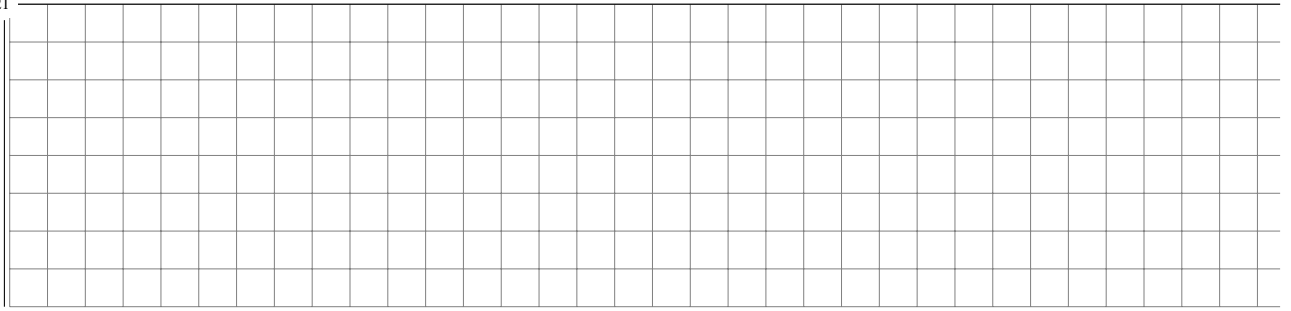
Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert schließlich

8.14





8.21



### 8.5 Übungsaufgaben

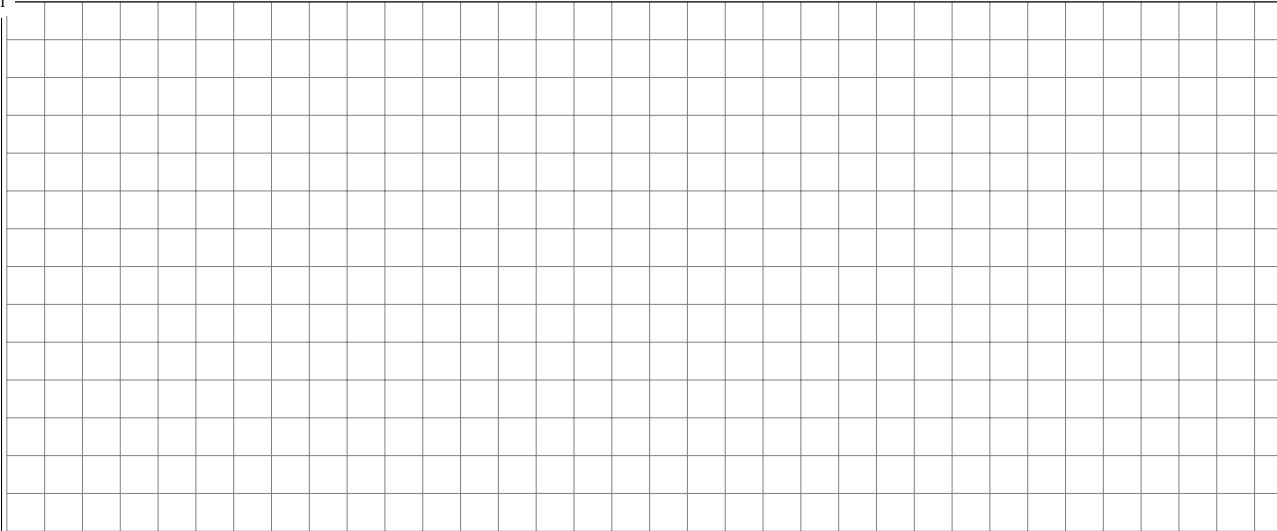
Lösen Sie die Differentialgleichungssysteme in [Pap12a, Seite 539ff, Zu Abschnitt 7] mit den hier behandelten Lösungsverfahren.

## 9 Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

### 9.1 Aufgabenstellung

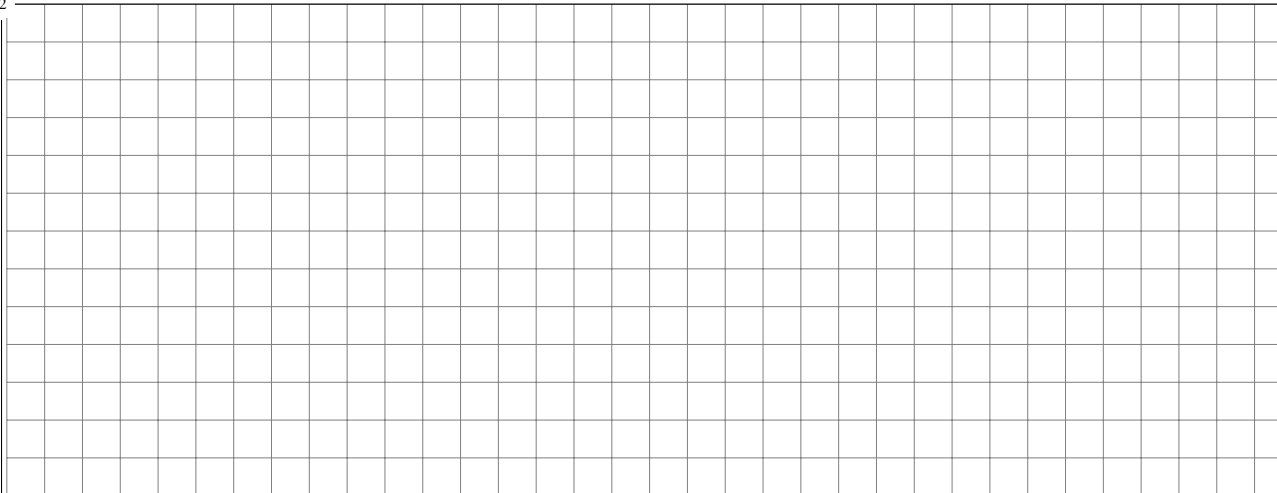
Häufig sind die Differentialgleichungen praktischer Probleme *nicht* mit Papier und Bleistift lösbar, zum Beispiel mit den Verfahren der vorigen Kapitel. Die Lösungsfunktionen lassen sich häufig auch nicht algebraisch darstellen. Bei im Voraus unbekanntem Anregungsfunktionen (zum Beispiel in modellgestützten Regelungsverfahren) ist es auch prinzipiell nicht möglich, eine geschlossene Form der Lösung anzugeben. Es bleibt nur noch, die Lösungsfunktionen *numerisch* zu bestimmen. Gegeben sei folgendes System:

9.1



Darstellung des Simulationsmodells<sup>1</sup> in Vektorschreibweise:

9.2



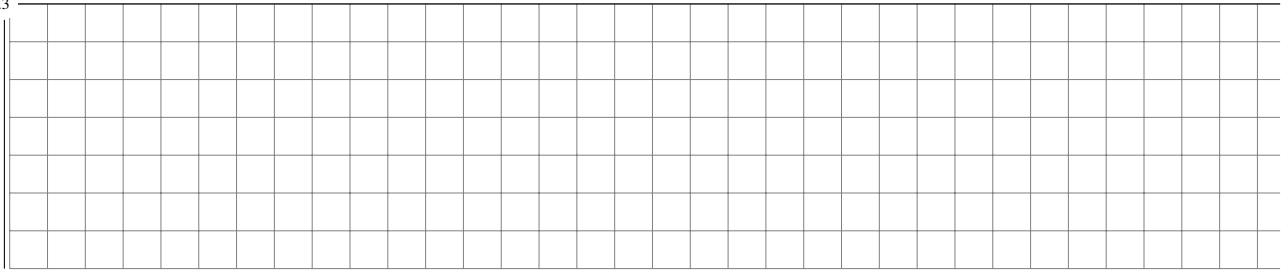
---

<sup>1</sup>In diesem Kapitel werden die Begriffe *Differentialgleichung* und *Simulationsmodell* synonym verwendet.

## 9 Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

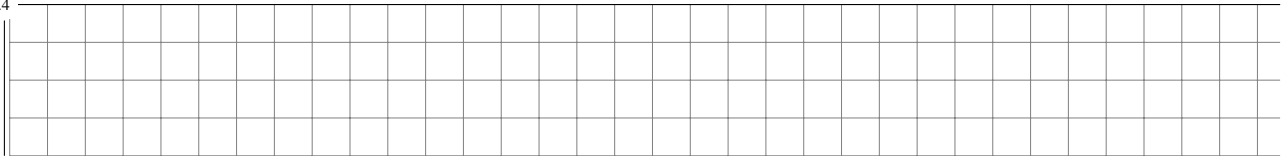
Bei expliziter Abhängigkeit von der Zeit wird für die numerische Lösung die Zeit  $t$  als Zustand  $x_{n+1} = t$  eingeführt. Man spricht dann von einem *autonomen Simulationsmodell*:

9.3



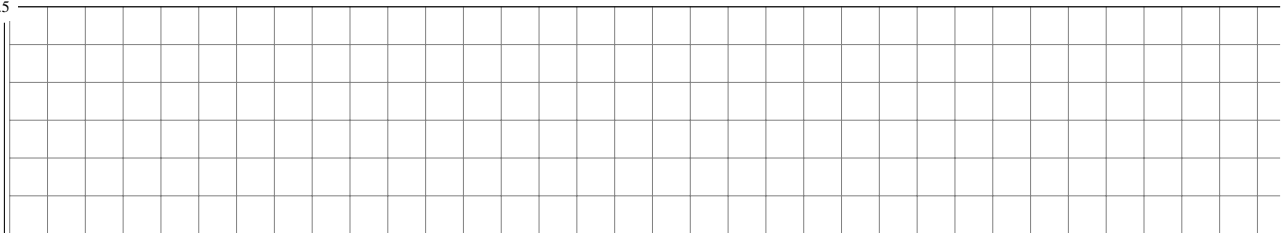
Mit Hilfe der Koordinaten-Transformation

9.4



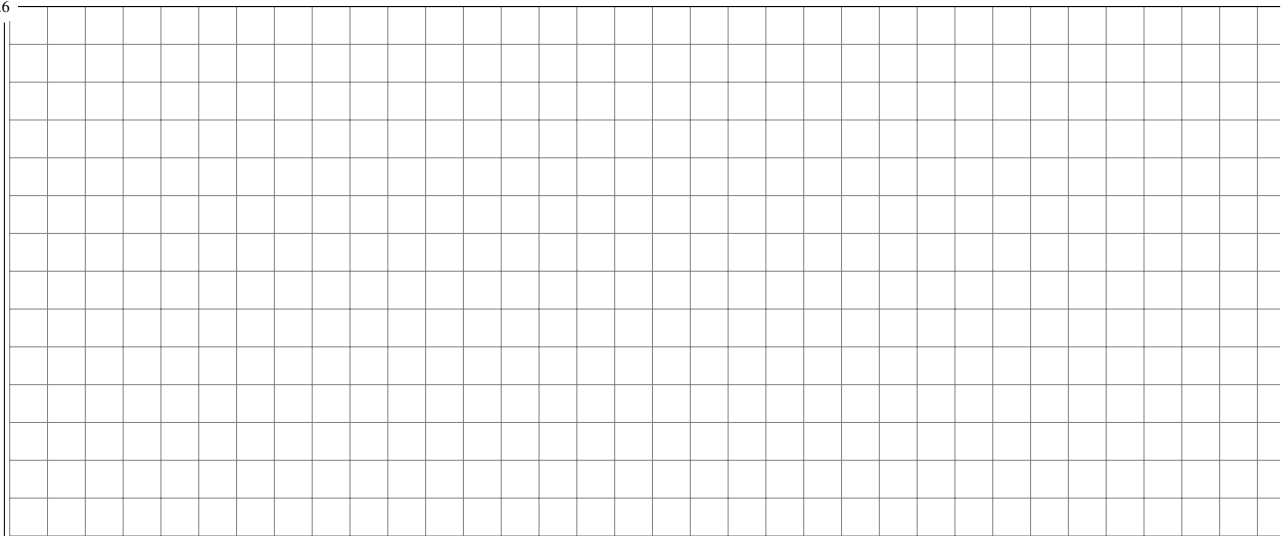
kommt man dann zur allgemeinen Form eines Simulations-Modells:

9.5



Je nachdem, ob die  $f_i$  von den Zuständen  $x_i$  abhängen, unterscheidet man zwei Fälle:

9.6



Man spricht bei  $\dot{x} = f(t)$  von *offener* und bei  $\dot{x} = f(x, t)$  von *rückgekoppelter* Integration. Das lässt sich jeweils mit Blockdiagrammen veranschaulichen:

9.7

Zur offenen Integration werden Programme für die numerische *Flächenintegration* genutzt. Diese sind ein Spezialfall der Programme für die numerische *Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*, die bei rückgekoppelter Integration verwendet werden.

## 9.2 Modellanalyse

Bevor wir ein (eventuell selbst implementiertes) Integrationsverfahren anwenden, sollten wir das Modell analysieren. Das hilft dann, das Verfahren auszuwählen und zu parametrieren. Zudem können wir dann besser abzuschätzen, ob ein Fehler vorliegt, zum Beispiel in der Implementierung des Integrationsverfahrens.

Zur Analyse bestimmen wir zunächst alle stationären Lösungen  $x_s$  der  $n$  - in der Regel nichtlinearen - Differentialgleichungen in Lücke 9.5:

9.8

Dann bestimmen wir die Jacobi-Matrix und jeweils ihre Eigenwerte für die stationären Lösungen.:

9.9

Aus den Eigenwerten lassen sich dann die Zeitkonngößen des Systems bestimmen:

9.10

Zeitkonstanten:

9.11

Perioden:

9.12

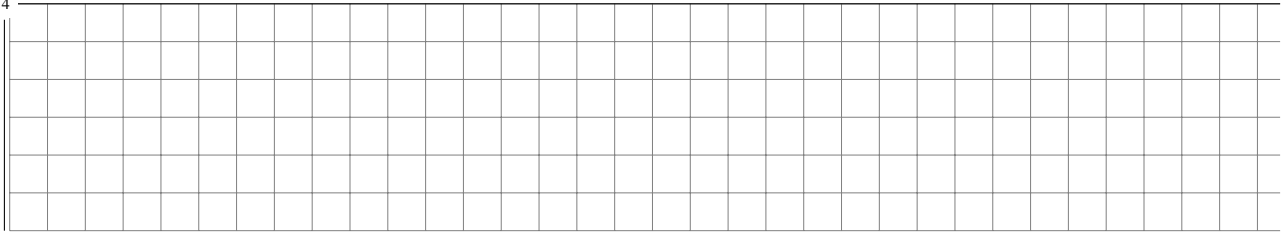
Simulationsdauer:

9.13

Schrittweite:

**Beispiel:** Nichtlineares Populationsmodell:

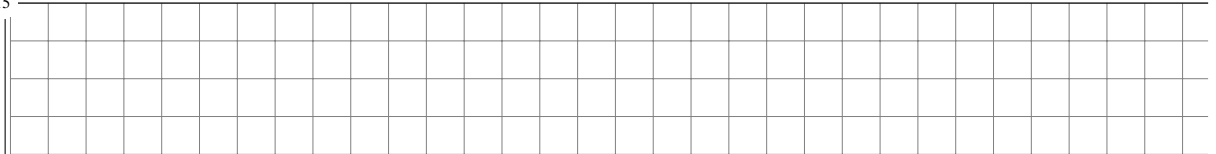
9.14



Bestimmung der Zeitkonstanten:

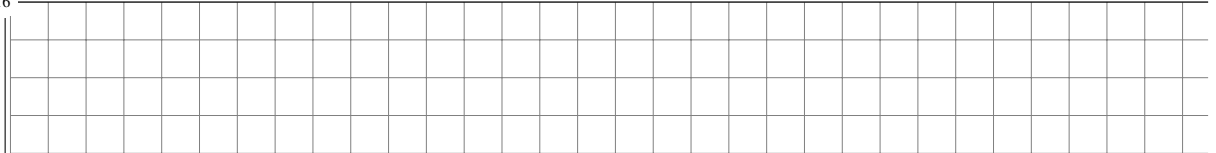
1. Schritt: stationäre Lösungen  $x_{s,i}$  berechnen, d.h.  $\dot{x} = \mathbf{0}$  setzen. Ergebnis:

9.15



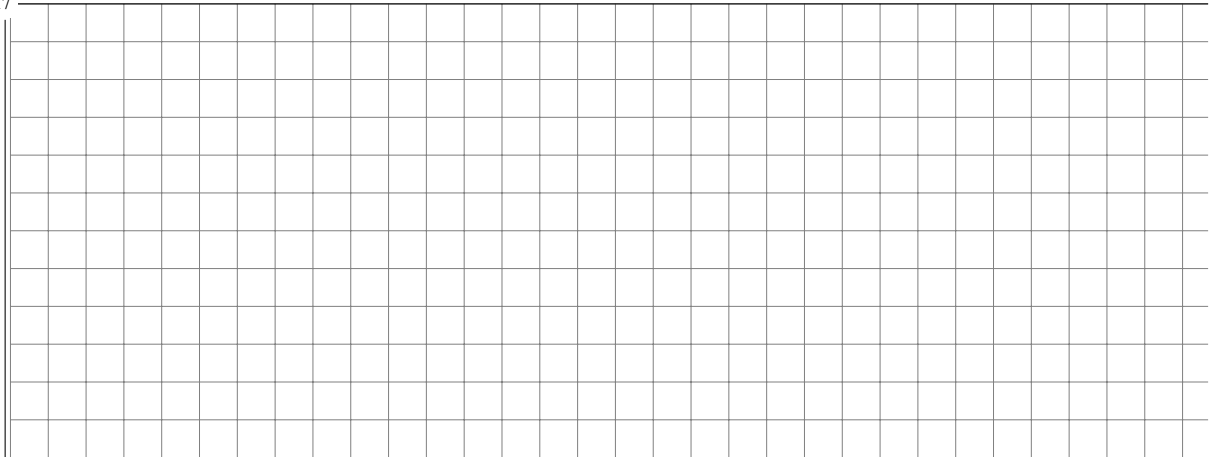
2. Schritt: Jacobi-Matrix bestimmen:

9.16



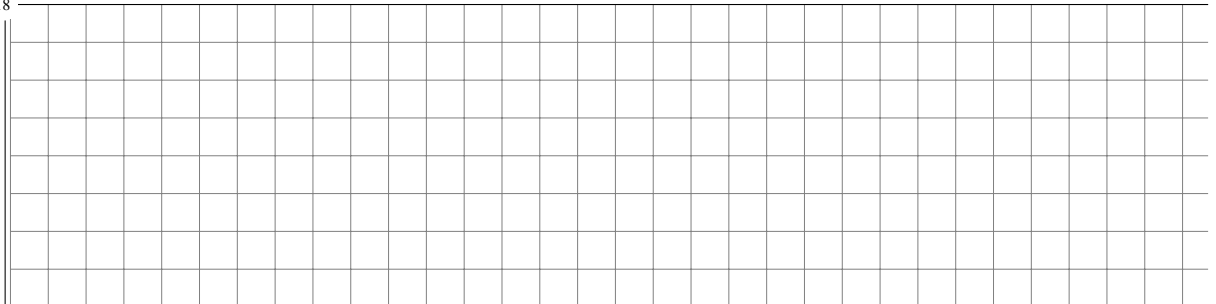
3. Schritt: Eigenwerte und Zeitkonstanten an den Stellen  $x_{s,i}$  berechnen:

9.17



Die Eigenwerte gelten jeweils in der Umgebung der zugehörigen stationären Lösungen:

9.18





### 9.3 Numerische Integrationsverfahren

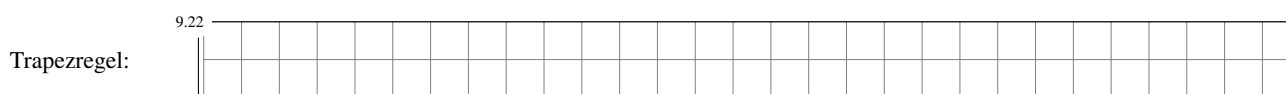
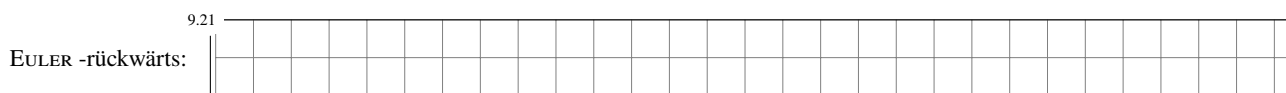
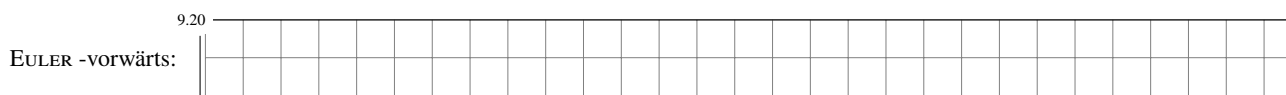
Wir gehen von der allgemeinen Form

$$\dot{x} = f(x), t_{\text{sim}} > t > 0, x(0) = x_0$$

eines Simulationsmodells aus. Die Idee der numerischen Integration lässt sich für die Ordnung  $n = 1$  veranschaulichen:




#### 9.3.1 Explizite und implizite Verfahren





RUNGE-KUTTA 4. Ordnung: Mittelung von 4 Steigungen:

9.29



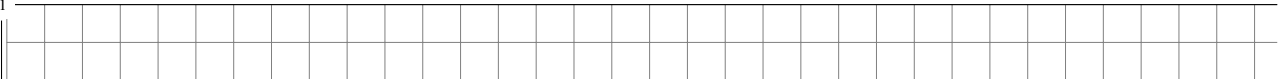
Formel:

9.30



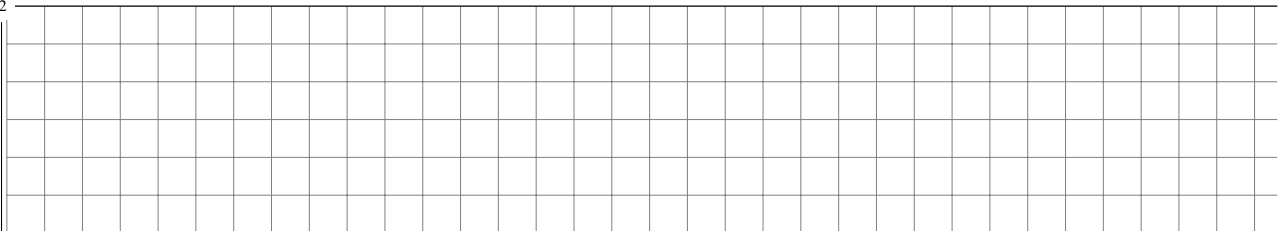
Konsistenz:

9.31



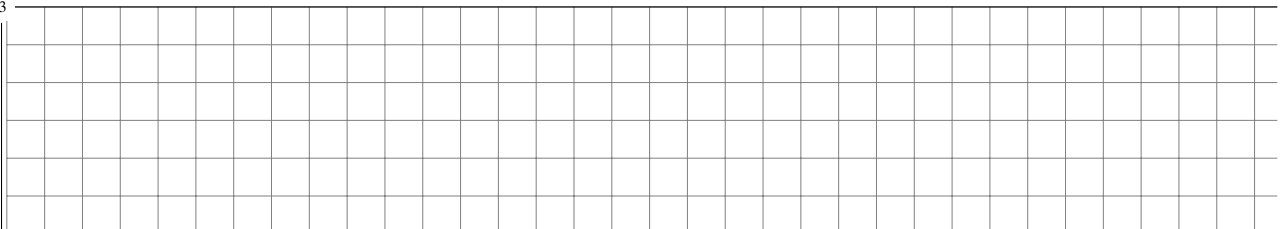
Für den Spezialfall  $f = f(t)$  ergibt sich die SIMPSON-Formel zur Flächenintegration:

9.32



Allgemeiner RUNGE-KUTTA  $m$ -ter Ordnung,  $\dot{x} = f(x, t)$ :

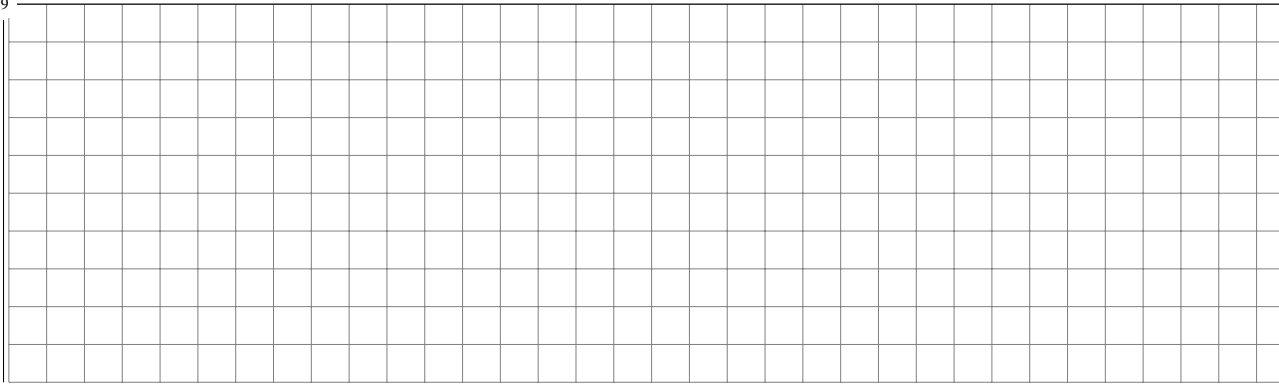
9.33





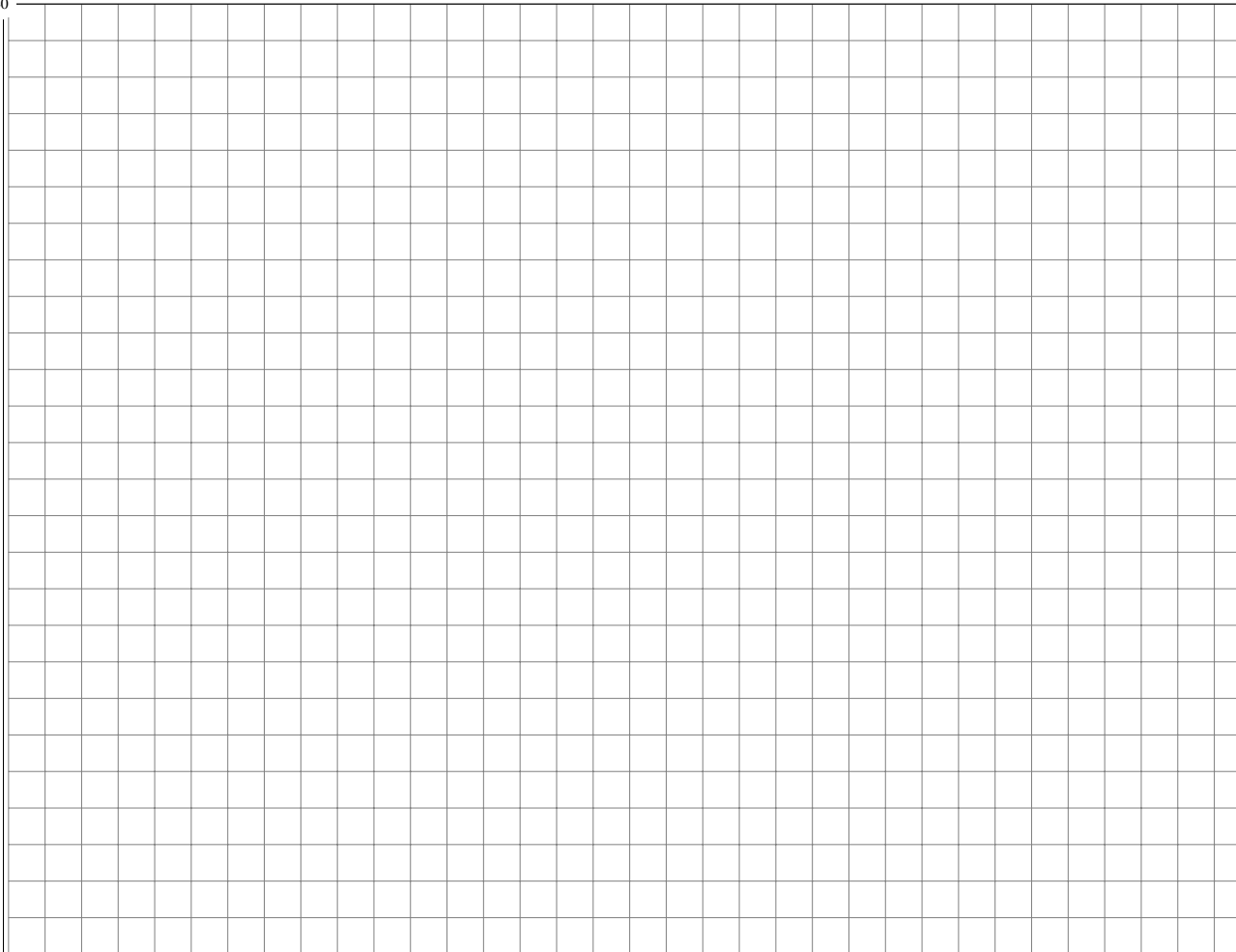
**Konstruktion eines expliziten Runge-Kutta 2. Ordnung** ( $A_R = A_D = 0$ )

9.39



Vergleich mit der TAYLOR-Reihe:

9.40



## A Anhang

### A.1 Tabellen

Tabelle A.1: Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \rightsquigarrow c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \rightsquigarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$f(t - T_1) \rightsquigarrow F(s)e^{-sT_1}$
Dämpfungssatz	$e^{-at} f(t) \rightsquigarrow F(s + a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{df(t)}{dt} \rightsquigarrow sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation Z'bereich	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \rightsquigarrow s^2 F(s) - sf(0) - \left. \frac{df}{dt} \right _0$
$n$ -fache Differentiation Z'bereich	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \rightsquigarrow s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \left. \frac{d^{i-1} f}{dt^{i-1}} \right _0$
Differentiation im Bildereich	$-t f(t) \rightsquigarrow \frac{d}{ds} F(s)$
$n$ -fache Differentiation im B'bereich	$(-t)^n f(t) \rightsquigarrow \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightsquigarrow \frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \rightsquigarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0+) = \lim_{\Re(s) \rightarrow \infty} (sF(s))$
2. Grenzwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))$

Tabelle A.2: Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Nr.	$f(t), t > 0$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
1	$\delta(t)$	1
2	$\varepsilon(t)$ oder $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
6	$t^n e^{-at}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
8	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
9	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
10	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
11	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
12	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
13	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
14	$e^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$
15	$1 - e^{-at}(\cos \omega_0 t + \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t)$	$\frac{a^2 + \omega_0^2}{s((s+a)^2 + \omega_0^2)}$

Eine *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ  $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$  lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus *Partialbrüchen* zerlegen:

1. Zunächst werden die *Nullstellen des Nennerpolynoms*  $N(x)$  nach *Lage* und *Vielfalt* bestimmt.
2. *Jeder* Nullstelle wird ein *Partialbruch* in folgender Weise zugeordnet, wobei konjugiert komplexe Nullstellen zum entsprechenden reellen quadratischen Term zusammengefasst werden können:

$$\begin{array}{lll}
 x_1: & \text{Einfache Nullstelle} & \rightarrow \frac{A}{x-x_1} \\
 x_1: & \text{Zweifache Nullstelle} & \rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} \\
 \vdots & & \\
 x_1: & \text{\textit{r-fache} Nullstelle} & \rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r} \\
 x^2 + ax + b: & \text{1-facher quadratischer Term} & \rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+ax+b} \\
 (x^2 + ax + b)^2: & \text{2-facher quadratischer Term} & \rightarrow \frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2} \\
 (x^2 + ax + b)^r: & \text{\textit{r-facher} quadratischer Term} & \rightarrow \frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \dots + \frac{A_rx+B_r}{(x^2+ax+b)^r}
 \end{array}$$

3. Die *echt* gebrochenrationale Funktion  $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$  ist dann als *Summe aller Partialbrüche* darstellbar.
4. Konstanten durch *Koeffizienten-Vergleich*, oder bei einfachen Nullstellen auch durch Einsetzen der Nullstelle bestimmen.

Abbildung A.1: Algorithmus zur Partialbruchzerlegung



## Literatur

- [ML03] C. B. Moler und C. F. Van Loan. „Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later“. In: *SIAM Review* 45. Abrufbar unter <http://www.cs.cornell.edu/cv/researchpdf/19ways+.pdf>. 2003, S. 3–49.
- [Pap10] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 4. Auflage. Bd. Klausur und Übungsaufgaben. Vieweg + Teubner, 2010.
- [Pap12a] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.
- [Pap12b] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 14. Auflage. Bd. 2. Springer Vieweg, 2012.
- [Unb07] Heinz Unbehauen. *Regelungstechnik II*. 9. Auflage. Vieweg Verlag, 2007.