Teil I.
Aufgaben

③ Aufgaben zur Extremwertrechnung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 2016/09/07, 14:37:00 +02'00'

Aufgabe 1:. Reviewfragen

1.1 Was sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Extrema von $f(x, y)$?

1.2 Was ist die anschauliche Erklärung für den Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der Eigenwerte von $\boldsymbol{H}_f$ und einem lokalen Extremum?

1.3 Wozu dient hier die Method der Lagrange'schen Multiplikatoren?

1.4 Was ist die anschauliche Erklärung von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (maximiere $f(x, y)$ unter der Bedingung $\phi(x, y) = 0$)?

Aufgabe 2:. Relative Extremwerte

Bestimmen Sie die relativen Extremwerte sowie Sattelpunkte folgender Funktionen

2.1 $z = f(x, y) = x^2 + 2\,x\,y - 2\,x + 3\,y^2 + 2\,y$

2.2 $z = f(x, y) = \dfrac{x^2\,y}{2} + x\,y + \dfrac{y^2}{4}$

2.3 $z = f(x, y) = y - y\,\sqrt{x} + x^2$

2.4 $z = f(x, y) = x\,y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

2.5 $z = f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\left(x^2 + y^2\right)$

Zusatzaufgabe: Stellen Sie die Funktionen mit Hilfe der Matlab-Funktion `ezsurf` dar.

Aufgabe 3:. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

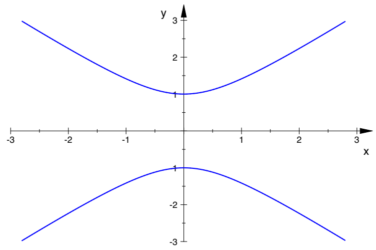
3.1 Minimieren Sie $f(x, y) = x^2 + y$ mit der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$

3.2 Welcher Punkt $\boldsymbol{P} = (x, y)$, $y > 0$, der Hyperbel

$$y^2 - x^2 = 1$$

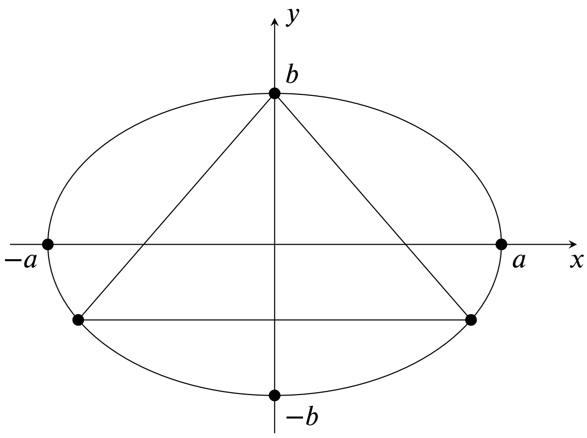
hat vom Punkt $(1, 0)$ den kleinsten Abstand d?
Hinweis: Minimieren Sie das Quadrat des Abstands

$$d(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$



3.3 Einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist ein gleichschenkliges Dreieck größter Fläche einzubeschreiben. Bestimmen Sie die Dreiecksfläche in Abhängigkeit von a und b
Hinweis: Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Zusatzaufgabe: Stellen Sie die Funktionen mit Hilfe folgender Matlab-Funktionen dar: `ezmesh` und `ezimplot3` (Download-Link:
http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23623-ezimplot3–implicit-3d-functions-plotter

Teil II.
Lösungen

Lösung 1:. Reviewfragen

1.1 Lücke 8 im Skript: Notwendige Bedingung: grad $f = 0$, hinreichende Bedingungen det $\boldsymbol{H}_f > 0$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$

1.2 Haben alle Eigenwerte an der Stelle des Extremums das gleiche Vorzeichen, dann wölbt sich die Fläche an dieser Stelle in allen Richtungen nach oben / unten bei positivem / negativem Vorzeichen der Eigenwerte ⇒ Minimium / Maximum.

1.3 Zur Lösung von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen, wobei die Nebenbedingungen nicht explizit auflösbar sind.

1.4 Projeziert man die implizite Kurve $\phi(x, y) = 0$, die in der x, y-Ebene liegt, auf die Fläche $f(x, y)$, wo sind dann Extrema dieser Projektion?

Lösung 2:. Relative Extremwerte

2.1

$$z_x = 2\,x + 2\,y - 2, z_y = 2\,x + 6\,y + 2, z_{xx} = 2$$
$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Notwendige Bedingung: $z_x = 0, z_y = 0 \Rightarrow (2, -1)$
Hinreichende Bedingung: $z_{xx}(2, -1) = 2 > 0, \det \boldsymbol{H}_f = 8 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt

2.2

$$z_x = y + x\,y, z_y = \frac{x^2}{2} + x + \frac{y}{2}, z_{xx} = y$$
$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} y & x+1 \\ x+1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Notwendige Bedingung: $z_x = 0, z_y = 0 \Rightarrow (0, 0), (-2, 0), (-1, 1)$
Hinreichende Bedingung: $z_{xx} \neq 0, \det \boldsymbol{H}_f > 0$
$z_{xx}(0, 0) = z_{xx}(-2, 0) = 0 \Rightarrow$ kein Extremwert
$z_{xx}(-1, 1) = 1 > 0, \det \boldsymbol{H}_f = 0.5 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt

2.3

$$z_x = 2\,x - \frac{y}{2\,\sqrt{x}}, z_y = 1 - \sqrt{x}, z_{xx} = \frac{y}{4\,x^{\frac{3}{2}}} + 2$$

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} \frac{y}{4\,x^{\frac{3}{2}}} + 2 & -\frac{1}{2\,\sqrt{x}} \\ -\frac{1}{2\,\sqrt{x}} & 0 \end{pmatrix}$$

Notwendige Bedingung: $z_x = 0, z_y = 0 \Rightarrow (1, 4)$
Hinreichende Bedingung: $z_{xx}(1, 4) = 3 > 0, \det \boldsymbol{H}_f = -0.25 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

2.4

$$z_x = y - \frac{1}{x^2}, z_y = x - \frac{1}{y^2}, z_{xx} = \frac{2}{x^3}$$

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

Notwendige Bedingung: $z_x = 0, z_y = 0 \Rightarrow (1, 1)$
Hinreichende Bedingung: $z_{xx}(1, 1) = 2 > 0, \det \boldsymbol{H}_f = 3 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt

2.5

$$z_x = \left(2\,x - 2\,x\,\left(x^2 + y^2\right)\right)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}, z_y = \left(2\,y - 2\,y\,\left(x^2 + y^2\right)\right)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

$$z_{xx} = \left(4\,x^2\,\left(x^2 + y^2\right) - 10\,x^2 - 2\,y^2 + 2\right)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

$$\boldsymbol{H}_f = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} \left(4\,x^4 + 4\,x^2\,y^2 - 10\,x^2 - 2\,y^2 + 2\right) & \left(4\,x\,y\,\left(x^2 + y^2 - 2\right)\right) \\ \left(4\,x\,y\,\left(x^2 + y^2 - 2\right)\right) & \left(4\,x^2\,y^2 - 2\,x^2 + 4\,y^4 - 10\,y^2 + 2\right) \end{pmatrix}$$

Notwendige Bedingung: $z_x = 0, z_y = 0 \Rightarrow (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (0, 0)$
Hinreichende Bedingung:

- $z_{xx}(0, \pm 1) = 0, \det \boldsymbol{H}_f = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich
- $z_{xx}(\pm 1, 0) = -4e^{-1}, \det \boldsymbol{H}_f = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich
- $z_{xx}(0, 0) = 2, \det \boldsymbol{H}_f = 4 \Rightarrow$ Tiefpunkt

Lösung 3:. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

3.1
- Zu minimierende Funktion: $f(x, y) = x^2 + y$
- Nebenbedingung $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

1. Hilfsfunktion mit Lagrange'schem Multiplikator λ

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

2. Alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $F(x, y, \lambda)$ gleich Null setzen und mögliche Extrempunkte bestimmen:

$$F_x(x, y, \lambda) = 0 = 2x + 2\lambda x \qquad \Rightarrow \{x \neq 0, \lambda = -1\}, \{x = 0\}$$
$$F_y(x, y, \lambda) = 0 = 2\lambda y + 1 \qquad \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2y}$$
$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 = x^2 + y^2 - 1$$

$$x \neq 0 :\Rightarrow -1 = -\frac{1}{2y} \Rightarrow y = \frac{1}{2}, F_\lambda(x, \frac{1}{2}) = x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = 0 : \; F_\lambda(0, y) = y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 1$$

3.

$$f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$$
$$f(0, \pm 1) = \pm 1$$

$\Rightarrow$ Minimum liegt an der Stelle $(0, -1)$

3.2
- Zu maximierende Funktion: $d^2(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - 1)^2 + y^2$
- Nebenbedingung $\phi(x, y) = y^2 - x^2 - 1 = 0$

1. Hilfsfunktion mit Lagrange'schem Multiplikator λ

$$F(x, y, \lambda) = (x - 1)^2 + y^2 - \lambda \left(x^2 - y^2 + 1\right)$$

2. Alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $F(x, y, \lambda)$ gleich Null setzen und mögliche Extrempunkte bestimmen:

$$F_x(x, y, \lambda) = 0 = 2\,x - 2 - 2\,\lambda\,x \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{x-1}{x}$$
$$F_y(x, y, \lambda) = 0 = 2\,y + 2\,\lambda\,y \qquad \Rightarrow \lambda = -1$$
$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 = y^2 - x^2 - 1$$

$$\frac{x-1}{x} = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$F_\lambda(\frac{1}{2}, y, \lambda) = 0 = y^2 - \frac{5}{4} \Rightarrow \text{ mit } y > 0 \; y = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5})$$

3.3
- Zu maximierende Funktion: Dreiecksfläche $A(x, y) = \frac{1}{2} H\,B = (b - y)\,x$

- Nebenbedingung $\phi(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

1. Hilfsfunktion mit Lagrange'schem Multiplikator λ

$$F(x, y, \lambda) = (b - y)\, x + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$$

2. Alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $F(x, y, \lambda)$ gleich Null setzen und mögliche Extrempunkte bestimmen:

$$F_x(x, y, \lambda) = 0 = b - y + 2\lambda b^2 x \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{y - b}{2b^2x}$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 0 = -x + 2\lambda a^2 y \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{x}{2a^2y}$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$$

$$\frac{y - b}{2b^2x} = \frac{x}{2a^2y} \Rightarrow b^2x^2 = a^2y^2 - a^2by$$

$$F_\lambda(a^2y^2 - a^2by, y, \lambda) = 0 = a^2y^2 - a^2by + a^2y^2 - a^2b^2$$

$$\Rightarrow P_1(0, b), P_2(a\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2})$$

3. $A(P_1) = 0 \Rightarrow$ Minimum, $A(P_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab \Rightarrow$ Maximum