

⑧ Laplace-Transformation zur Lösung von linearen Differentialgleichungen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 4. Oktober 2015, 22:50

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Laplace-Transformierte verschiedener Funktionen	5
3	Inverse Laplace-Transformation	5
4	Partialbruchzerlegung	6
5	Übungen	7
1	Einleitung	

Wenn man in die inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{x} + ax = u(t)$$

als Anregung

$$u(t) = U_0 e^{st}$$

mit konstantem U_0 und der (im Allgemeinen komplexen) Variablen $s = a + ib$ einsetzt, dann ergibt sich die partikuläre Lösung mit dem Ansatz $x_p(t) = X_0 e^{st}$. Man könnte nun wie im letzten Kapitel einfach erst die homogene Lösung x_h berechnen, den Ansatz für $x_p(t)$ in die Differentialgleichung einsetzen und nach X_0 auflösen, um die Lösung $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ zu bestimmen. Wir berechnen hier aber den Quotienten $\frac{X_0}{U_0}$:



Der Quotient lässt sich als *Übertragungsfunktion* $G(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$ auffassen, die sich aus der *Laplace-Transformierten* dieser Differentialgleichung ergibt. Der Laplace-Transformations-Operator wird mit einem geschwungenen \mathcal{L} bezeichnet, man schreibt allgemein $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Die Laplace-Transformation ist definiert als

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Die Laplace-Transformierte wird mit Großbuchstaben bezeichnet, die Laplace-Transformierte von $x(t)$ ist also

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Berechnen wir die Laplace-Transformierte von \dot{x} , also $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\}$:

2

Der Differentialoperator $\frac{d}{dt}$ lässt sich somit durch s ersetzen¹ und damit eine lineare Differentialgleichung im *Zeitbereich* in den *Bildbereich* transformieren. Für eine bestimmte Anregungsfunktion $u(t)$ lässt sich die Lösung zunächst im *Bildbereich* durch Auflösen nach $X(s)$ berechnen. Die Lösung im *Zeitbereich* ist dann

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{U(s) \cdot G(s)\}$$

Es gibt noch zwei wichtige Punkte, die uns fehlen, um lineare Differentialgleichung auf diese Art zu lösen:

3

¹Anfangsbedingungen $x(0) \neq 0$ entsprechend berücksichtigen.

2 Laplace-Transformierte verschiedener Funktionen

Die einfachste Anregungsfunktion $u(t)$ ist die Sprungfunktion $h(t)$:



Für die Laplace-Transformierte ergibt sich:



Auf diese Art und Weise lassen sich für eine Reihe von Funktionen die jeweiligen Laplace-Transformierten finden. Üblicherweise berechnet man diese nicht immer wieder neu, sondern nutzt Korrespondenz-Tabellen wie Tabelle ???. In Tabelle ??? taucht noch vollständigshalber die Delta-Funktion $\delta(t)$ auf, die wir in dieser Vorlesung nicht weiter betrachten.

3 Inverse Laplace-Transformation

Die Tabelle ??? lässt sich auch nutzen, um zu einer gegebenen Bildfunktion $X(s)$ die Funktion $x(t)$ im Zeitbereich zu finden. Das übliche Vorgehen bei der Rücktransformation ist also, $X(s)$ so umzuformen, dass man die Funktion in der Tabelle ??? findet. Hierzu sind häufig die Rechenregeln in Tabelle ??? notwendig. In Tabelle ??? wird das alternative Zeichen $\circ \rightarrow \bullet$ (leerer Kreis $\hat{=}$ Zeitbereich, gefüllter Kreis $\hat{=}$ Bildbereich) für die Laplace-Transformation verwendet. Die Rücktransformation ist entsprechend mit $\bullet \rightarrow \circ$ gekennzeichnet.

Die Lösung für die Differentialgleichung $\dot{x} + ax = u(t)$ mit $x(0) = 0$, die mit der Sprungfunktion $u(t) = h(t)$ angeregt wird, ist somit:

6

4 Partialbruchzerlegung

Setzt man in die Differentialgleichung $\dot{x} + ax = U_0 e^{st}$ die Werte $a = 1$, $U_0 = 1$ und $s = -2$ ein, dann ergibt sich für $x(0) = 0$ folgende Übertragungsfunktion:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Diesen Bruch finden wir erstmal nicht direkt in Tabelle ???. Hier ist erst eine *Partialbruchzerlegung* notwendig (siehe auch Abbildung 1):

7

Die Rücktransformation und damit die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist dann wegen der Linearitätseigenschaft (siehe Tabelle ??)

8

Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass sich dieselbe Lösung ergibt, wenn man
 - a) die homogene und die partikuläre Lösung x_h und x_p respektive bestimmt, und

b) die Lösung mit Hilfe der entsprechenden Korrespondenz in der Tabelle in [Pap12a, Seite 657f, Kapitel 4.2] bestimmt.

2. Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x}+x = 0$, $x(0) = 1$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösungen:

9

Wichtig: Voraussetzung für die Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation ist, dass die linke und rechte Seite der Differentialgleichung $= 0$ für $t < 0$ ist!

5 Übungen

[Pap12b, Seite 680ff]: Alle Aufgaben zu Abschnitt 1, 2, 4 und 5.

Literatur

- [Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 1. Vieweg + Teubner, 2011.
- [Pap12a] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.
- [Pap12b] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 14. Auflage. Bd. 2. Springer Vieweg, 2012.

Anhang

Tabelle 1: Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \circ \bullet c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$f(t - T_t) \circ \bullet F(s) e^{-sT_t}$
Dämpfungssatz	$e^{-at} f(t) \circ \bullet F(s + a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{df(t)}{dt} \circ \bullet sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation Z'bereich	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \circ \bullet s^2 F(s) - sf(0) - \left. \frac{df}{dt} \right _0$
n -fache Differentiation Z'bereich	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ \bullet s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \left. \frac{d^{i-1} f}{dt^{i-1}} \right _0$
Differentiation im Bildereich	$-t f(t) \circ \bullet \frac{d}{ds} F(s)$
n -fache Differentiation im B'bereich	$(-t)^n f(t) \circ \bullet \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \circ \bullet F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0+) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} (sF(s))$
2. Grenzwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s))$

Tabelle 2: Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Nr.	$f(t), t > 0$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$ oder $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$t^n e^{-at}, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
8	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
9	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
10	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
11	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
12	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
13	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
14	$e^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$
15	$1 - e^{-at} \left(\cos \omega_0 t + \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$	$\frac{a^2 + \omega_0^2}{s \left((s+a)^2 + \omega_0^2 \right)}$

Eine *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus *Partialbrüchen* zerlegen:

1. Zunächst werden die *Nullstellen des Nennerpolynoms* $N(x)$ nach *Lage* und *Vielfalt* bestimmt.
2. *Jeder* Nullstelle wird ein *Partialbruch* in folgender Weise zugeordnet, wobei konjugiert komplexe Nullstellen zum entsprechenden reellen quadratischen Term zusammengefasst werden können:

$$\begin{array}{lll}
 x_1: & \text{Einfache Nullstelle} & \rightarrow \frac{A}{x - x_1} \\
 x_1: & \text{Zweifache Nullstelle} & \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} \\
 \vdots & & \\
 x_1: & \text{\textit{r-fache} Nullstelle} & \rightarrow \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r} \\
 x^2 + ax + b: & \text{1-facher quadratischer Term} & \rightarrow \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} \\
 (x^2 + ax + b)^2: & \text{2-facher quadratischer Term} & \rightarrow \frac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + ax + b)^2} \\
 (x^2 + ax + b)^r: & \text{\textit{r-facher} quadratischer Term} & \rightarrow \frac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(x^2 + ax + b)^r}
 \end{array}$$

3. Die *echt* gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ ist dann als *Summe aller Partialbrüche* darstellbar.
4. Konstanten durch *Koeffizienten-Vergleich*, oder bei einfachen Nullstellen auch durch Einsetzen der Nullstelle bestimmen.

Abbildung 1: Algorithmus zur Partialbruchzerlegung aus [Pap11, Seite 469]