③ Extremwertrechnung

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 17. August 2015, 12:55

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Extrema von Funktionen zweier Veränderlicher

Wie bei Funktionen von einer Veränderlichen untersucht man Stellen im Inneren des Definitionsbereichs, an denen der Funktionswert entweder größer oder kleiner als alle Funktionswerte in einer Umgebung ist: *lokale* Maxima und Minima (Sammelbegriff: Extrema). Der insgesamt größte oder kleinste Funktionswert heißt das *globale* Maximum oder Minimum. Wenn der existiert (was nicht sein muss!), wird er entweder ein lokales Maximum oder Minimum sein, oder am Rand des Definitionsbereichs liegen. Somit gibt es typischerweise eine überschaubare

Sammlung an Funktionswerten, von denen sich der größte oder kleinste durch Vergleichen bestimmen lässt.

Die lokalen Extrema lassen sich mit Hilfe der Ableitungen finden. Damit an einer Stelle x_0, y_0 im Inneren des Definitionsbereichs ein lokales Extremum liegen kann, muss gelten (notwendige Bedingung):

1

Diese Bedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend, wie diese geometrische Situationen zeigen:

2

Meist - aber nicht immer - lässt sich die Lage mit der zweiten Ableitung aufklären. Bei Funktionen *einer* Veränderlichen kommt es auf das Vorzeichen der zweiten Ableitung an. Mit *zwei* Veränderlichen lässt sich untersuchen, ob sich die Funktion in jede Richtung nach unten oder nach oben oder mal so mal so von der Tangentialebene wegkrümmt. Dazu bildet man die Matrix mit den Werten aller zweiten partiellen Ableitungen an (x_0, y_0), die sogenannte

Hessematrix.: 3 Diese Matrix ist immer symmetrisch. Wenn alle Eigenwerte dieser Matrix positiv sind, krümmt sich die Funktion an (x_0, y_0) nach oben von der

Tangentialebene weg. Wenn alle Eigenwerte negativ sind, krümmt sich die Funktion nach unten weg. In allen übrigen Fällen (Eigenwerte null oder gemischt positiv und negativ) lässt sich nichts Genaues sagen. Die Begründung liegt im Taylor-Polynom zweiten Grades. Zur Erinnerung das Taylor-Polynom für Funktionen einer Veränderlichen:

4

Analog gilt für Funktionen zweier Veränderlichen:

5

Kompakt lässt sich das mit dem Vektor $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ der Veränderlichen und mit Hilfe des Gradienten und der Hessematrix von f schreiben:

6

Der quadratische Term bestimmt, wie sich die Funktion an die Tangentialebene schmiegt.

Für zwei Veränderliche gibt es ein einfaches Rezept, um die Vorzeichen der Eigenwerte ohne große Rechnung zu prüfen: Die Eigenwerte einer symmetrischen 2×2-Matrix sind genau dann beide positiv oder beide negativ, wenn die Determinante D der Matrix 7 ist. Ist das der Fall, entscheidet das Vorzeichen des linken oberen Eintrags der Matrix, ob beide Eigenwerte positiv oder negativ sind. Das Prüfen auf ein lokales Maximum an (x_0, y_0) sieht als Rezept so aus:

8

Was ändert sich, wenn man statt dessen auf ein lokales Minimum prüft?

2 Ausgleichsrechnung

Bei realen Messungen treten immer Abweichungen vom „wahren“ Wert auf. Wie lässt sich nun eine Funktion bestimmen, so dass die Abweichung der Funktion von den Messdaten minimal wird? Dies ist eine weitere Art von Extremwertaufgabe, die nach folgendem Rezept gelöst werden kann:

1. Zunächst muss der *Funktionstyp* festgelegt werden. Als Entscheidungshilfe kann hier das *Streuungsdiagramm* dienen, das beispielsweise so aussehen kann:

   9

   Der *Lösungsansatz* $y = f(x)$ enthält dann nur noch unbekannte Parameter a, b, c, …

2. Mit dem ausgewählten Funktionstyp $y = f(x)$ wird die *Summe der Abstandsquadrate*

   10

   gebildet. Diese hängt auch noch von den Kurvenparametern a, b, c, … ab.

3. Die Parameter lassen sich dann aus den *Gaußschen Normalengleichungen* bestimmen:

11

Mit den Gaußschen Normalengleichungen lässt sich die Regressionsgerade, auch Ausgleichsgerade genannt, herleiten. Mit der Funktion $y = f(x) = ax + b$ ist die Summe der Abstandsquadrate 12 und damit ergibt sich für die Gaußschen Normalengleichungen

13

Daraus folgt dann

14

3 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Nebenbedingung explizit auflösbar

Welcher Zylinder (Konservendose) hat bei gleichem Inhalt die geringste Oberfläche (Materialverbrauch)? Diese Aufgabenstellung ist die Extremwertaufgabe *minimiere die Zylinderoberfläche*

$A(r,h) =$ 15 unter der Nebenbedingung *Volumen* $V(r,h) =$ 16 .

In diesem Fall lässt sich die Nebenbedingung explizit nach der Höhe h auflösen und in $A(r,h)$ einsetzen:

17

Für diese Funktion einer Veränderlichen lässt sich nun leicht das lokale Minimum bestimmen:

18

Achtung: auch das Randverhalten untersuchen: 19

Das Einsetzen der Nebenbedingung(en) bewirkt, dass sich die Dimension der Aufgabe um die Zahl der Nebenbedingungen verringert, so dass wir mit dem vorhandenen Wissen nun auch Extremwertaufgaben mit Funktionen $n > 2$ Veränderlicher und $n-1$ oder $n-2$ Nebenbedingungen rechnen können: Zum Beispiel den kleinsten Abstand des Ursprungs zu einer Fläche $z = f(x,y)$.

Abstand zum Ursprung 20 , das heißt es ist das Minimum

folgender Funktion gesucht: 21 ,

was sich mit dem oben genannten Verfahren lösen lässt.

Nebenbedingung nicht auflösbar

In manchen Fällen, zum Beispiel falls sich die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ nicht explizit auflösen lässt, behilft man sich mit einem Trick: mit der *Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren*. Rezept:

1. Hilfsfunktion $F(x, y, \lambda)$ mit Lagrangeschen Multiplikator λ bilden:

   22

2. Alle partiellen Ableitung 1. Ordnung von $F(x, y, \lambda)$ bilden, gleich Null setzen und alle möglichen Extrempunkte (x_i, y_i) bestimmen:

   23

3. Die gefundenen Punkte in die Funktion einsetzen und die Stelle des Extremums bestimmen. (Es ließe sich auch die 3×3-Hessematrix aufstellen, um dann die Eigenwerte auf ihr Vorzeichen zu prüfen. Das ist allerdings nicht Inhalt dieser Vorlesung.)

4. Gegebenenfalls Randwerte überprüfen.

Beispiel: Maximiere $f(x, y) = x + y$ mit der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$, wir suchen also den größtmöglichen Wert von $f(x, y)$ und die zugehörigen Werte (x, y), die auch die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ erfüllen.

1. Hilfsfunktion: 24

2. Partielle Ableitungen gleich Null setzen und Kandidaten bestimmen:

   25

3. Einsetzen und Maximum bestimmen:

26

Diese Aufgabe lässt sich in MATLAB® veranschaulichen:

```
syms x y
ezsurf(x+y)
ezimplot3(x^2+y^2-1)
```

Der Befehl `ezimplot3d` gehört nicht zum Standardumfang von MATLAB®; er lässt sich von `http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23623-ezimplot3-implicit-3d-functions-plotter` herunterladen.

4 Übungsaufgaben

[Pap12, S.332ff], [Pap10, Kapitel E, alle Aufgaben zu Abschnitt 2]

Literatur

[Pap10] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 4. Auflage. Bd. Klausur und Übungsaufgaben. Vieweg + Teubner, 2010.

[Pap12] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.