9 Fourier-Transformation

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 31. Juli 2014, 13:53

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Idee der kontinuierlichen Fourier-Transformation

Die Fourier-*Reihe* setzt periodische Funktionen aus Gleichspannung, Grundwelle und Oberwellen zusammen. Aber was ist mit nicht-periodischen Funktionen? Es stellt sich heraus, dass man die bilden kann, wenn man beliebige Frequenzen zulässt, nicht nur ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz. Das kann man als Grenzwert einer Fourier-Reihe mit immer größerer Periode T verstehen. Sei f dazu eine nichtperiodische Funktion, die zum Beispiel stetig differenzierbar ist, um technische Probleme in Weiteren zu vermeiden. Wenn man die komplexe Fourier-*Reihe* so bildet:

1

erhält man eine Funktion $g(t)$ mit Periode T. Diese Funktion stimmt für $-T/2 < t < T/2$ mit f überein.

Wählt man nun die Periode $T = {}^{2\pi}/_{\omega_0}$ größer und größer, passt die Fourier-Reihe schließlich für jedes noch so große und noch so kleine t, im Grenzfall $T \to \infty$ wird aus der periodischen Funktion eine *nichtperiodische* Funktion. Bei diesem Grenzübergang wird der Abstand

$\Delta\omega =$ 2

zweier *benachbarter* Kreisfrequenzen *immer kleiner*, im Grenzfall gilt

3

Das bedeutet, dass zur Beschreibung einer *nichtperiodischen* Funktion *alle* harmonischen Schwingungen im Kreisfrequenzbereich

4

benötigt werden! Die komplexe Fourier-Reihe war

5

Setzt man nun $\omega = n\omega_0$ und c_n ein ergibt sich

6

Wir untersuchen $T \to \infty$, also $\Delta\omega \to 0$. Das Integral geht gegen 7

8 – zumindest, wenn die Funktion f so schnell abklingt dass .

Die Kreisfrequenz ω läuft in immer kleineren Schritten von $2\pi/T$ in Richtung $+\infty$ und in Richtung $-\infty$. Die Summe in der Fourier-Reihe wird im Grenzwert ein Integral:

9

Diese Gleichung ist der Schlüssel zur kontinuierlichen Fourier-Transformation (*continuous Fourier transform* oder nur *Fourier transform*)

2 Kontinuierliche Fourier-Analyse und Synthese

Die (kontinuierliche) Fourier-Transformierte F einer Funktion f (zu Einschränkungen siehe vorigen Abschnitt) wird definiert durch

10

Wenn $F(\omega)$ gegeben ist, kann man also die Funktion $f(t)$ wieder zurückerhalten (inverse Fourier-Transformation):

11

Das folgt aus der Gleichung, die wir im vorigen Abschnitt gefundenen haben. Vorsicht mit der Literatur: Der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ wird abhängig vom Autor unterschiedlich zur Fourier-Transformation und inversen Fourier-Transformation zugeordnet; in [Pap12] ist es so wie hier definiert.

Originalfunktion $f(t)$ und Bildfunktion $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ bilden ein *zusammengehöriges Funktionenpaar*. Man verwendet hierfür - wie bei der Laplace-Transformation - auch die symbolische Schreibweise

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)$ (sog. *Korrespondenz*)

Anders als die Fourier-*Reihe* schreibt man die Fourier-*Transformation* in technischen Anwendungen nur selten mit Sinus und Cosinus hin.

Die Fourier-Transformation nimmt ein Signal in Zeitdarstellung (= Zeitbereich) und wandelt es in eine Spektraldarstellung = Frequenzdarstellung (= Frequenzbereich) um; das ist die Fourier-*Analyse*. Die inverse Fourier-Transformation macht das Umgekehrte: die Fourier-Synthese. Anders als bei der Fourier-Reihe sehen Analyse und Synthese hier gleichartig aus.

Man kann die Fourier-Transformation als eine Abbildung von Funktionen auf Funktionen auffassen. Eine herkömmliche Funktion nimmt eine Zahl und liefert eine Zahl zurück. Die Fourier-Transformation nimmt eine Funktion und liefert eine Funktion zurück. Summen von Funktionen oder konstante Vielfache von Funktionen werden dabei wieder zu Summen oder Vielfachen der Fourier-Transformierten. Die Fourier-Transformation verhält sich also abstrakt (bei unserer Definition der Fourier-Transformierten bis auf den konstanten Faktor 2π) wie eine Drehung von Vektoren, denn es gilt für die „Länge“ von Funktionen (Satz von Plancherel):

12

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega =$$

Vergleich mit der letztes Mal behandelten Laplace-Transformation: Die Fourier-Transformation zerlegt Schwingungen in sinusförmige Anteile, die sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Möchte man nur *kurze* Vorgänge betrachten, die erst ab dem Zeitpunkt $t = 0$ starten (wie zum Beispiel in der Regelungstechnik), dann benutzt man eher die Laplace-Transformation und anstatt des rein imaginären Exponenten $i\omega t$ die komplexe Größe $s \cdot t$.

Aufgabe: Leiten Sie unter Verwendung von $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t} = 0$ den Ableitungssatz der Fourier-Transformation $\mathcal{F}\{\dot{f}(t)\} = i\omega F(\omega)$ her.

13

Die in einer Korrespondenz

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

auftretenden Variablen sind die Zeit t und die Kreisfrequenz ω. Daher nennt man $f(t)$ *Zeitfunktion* und $F(\omega)$ *Frequenzfunktion* oder *Frequenzspektrum.*, die Fourier-Transformation transformiert also die *Zeitfunktion* $f(t)$ aus dem *Zeitbereich* in die *Frequenzfunktion* $F(\omega)$ im *Frequenzbereich.* Von besonderem Interesse ist dabei der *Betrag* und der *Winkel* (oder Argument) der meist komplexwertigen Frequenzfunktion $F(\omega)$. Folgende Bezeichnungen sind üblich:

14

Mit diesen Größen lässt sich die *Bildfunktion* oder *Fourier-Transformierte* $F(\omega)$ auch folgendermaßen darstellen:

15

Mit dem oben hergeleiteten Ableitungssatz lassen sich lineare Differentialgleichungen - analog zur Laplace-Transformation - in den Frequenzbereich transformieren, dort nach der gesuchten Variablen auflösen und wieder zurücktransformieren und hat dann die Differentialgleichung mit Hilfe der Fourier-Transformation gelöst - bei Verwendung der Korrespondeztabellen zum Beispiel in [Pap12, Seite 595f] - rein algebraisch ohne eine Integration durchführen zu müssen! Es gelten auch sonst ähnliche Rechenregeln wie bei der Laplace-Transformation, siehe [Pap12, Seite 590].

3 Übungsaufgaben

[Pap12, Seite 607ff]: Alle Aufgaben zu Abschnitt 1, 4, 5 und 6.

Literatur

[Pap12] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.