⑧ Laplace-Transformation zur Lösung von linearen Differentialgleichungen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 31. Juli 2014, 13:52

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wenn man in die inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{x} + ax = u(t)$$

als Anregung

$$u(t) = U_0 \mathrm{e}^{st}$$

mit konstantem U_0 und der (im Allgemeinen komplexen) Variablen $s = a + ib$ einsetzt, dann ergibt sich die partikuläre Lösung mit dem Ansatz $x_\mathrm{p}(t) = X_0 \mathrm{e}^{st}$. Man könnte nun wie im letzten Kapitel einfach erst die homogene Lösung x_h berechnen, den Ansatz für $x_\mathrm{p}(t)$ in die Differentialgleicghung einsetzen und nach X_0 auflösen, um die Lösung $x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t)$ zu bestimmen. Wir berechnen hier aber den Quotienten $\dfrac{X_0}{U_0}$:

Der Quotient lässt sich als *Übertragungsfunktion* $G(s) = \dfrac{X(s)}{U(s)}$ auffassen, die sich aus der *Laplace-Transformierten* dieser Differentialgleichung ergibt. Der Laplace-Transformations-Operator wird mit einem geschwungenen $\mathcal{L}$ bezeichnet, man schreibt allgemein $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Die Laplace-Transformation ist definiert als

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty f(t) \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t$$

Die Laplace-Transformierte wird mit Großbuchstaben bezeichnet, die Laplace-Transformierte von $x(t)$ ist also

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int\limits_0^\infty x(t) \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t$$

Berechnen wir die Laplace-Transformierte von $\dot{x}$, also $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\}$:

2

Der Differentialoperator ${}^{\mathrm{d}}\!/_{\mathrm{d}t}$ lässt sich somit durch s ersetzen[1] und damit eine lineare Differentialgleichung im *Zeitbereich* in den *Bildbereich* transformieren. Für eine bestimmte Anregungsfunktion $u(t)$ lässt sich die Lösung zunächst im *Bildbereich* durch Auflösen nach $X(s)$ berechnen. Die Lösung im *Zeitbereich* ist dann

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{U(s) \cdot G(s)\}$$

Es gibt noch zwei wichtige Punkte, die uns fehlen, um lineare Differentialgleichung auf diese Art zu lösen:

3

[1] Anfangsbedingungen $x(0) \neq 0$ entsprechend berücksichtigen.

2 Laplace-Transformierte verschiedener Funktionen

Die einfachste Anregungsfunktion $u(t)$ ist die Sprungfunktion $h(t)$:

4

Für die Laplace-Transformierte ergibt sich:

5

Auf diese Art und Weise lassen sich für eine Reihe von Funktionen die jeweiligen Laplace-Transformierten finden. Üblicherweise berechnet man diese nicht immer wieder neu, sondern nutzt Korrespondenz-Tabellen wie Tabelle 1. In Tabelle 1 taucht noch vollständigkeitshalber die Delta-Funktion $\delta(t)$ auf, die wir in dieser Vorlesung nicht weiter betrachten.

3 Inverse Laplace-Transformation

Die Tabelle 1 lässt sich auch nutzen, um zu einer gegebenen Bildfunktion $X(s)$ die Funktion $x(t)$ im Zeitbereich zu finden. Das übliche Vorgehen bei der Rücktransformation ist also, $X(S)$ so umzuformen, dass man die Funktion in der Tabelle 1 findet. Hierzu sind häufig die Rechenregeln in Tabelle 2 notwendig. In Tabelle 2 wird das alternative Zeichen $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ (leerer Kreis $\widehat{=}$ Zeitbereich, gefüllter Kreis $\widehat{=}$ Bildbereich) für die Laplace-Transformation verwendet. Die Rücktransformation ist entsprechend mit $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$ gekennzeichnet.

Die Lösung für die Differentialgleichung $\dot{x} + ax = u(t)$ mit $x(0) = 0$, die mit der Sprungfunktion $u(t) = h(t)$ angeregt wird, ist somit:

6

4 Partialbruchzerlegung

Setzt man in die Differentialgleichung $\dot{x} + ax = U_0 \mathrm{e}^{st}$ die Werte $a = 1$, $U_0 = 1$ und $s = -2$ ein, dann ergibt sich für $x(0) = 0$ folgende Übertragungsfunktion:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Diesen Bruch finden wir erstmal nicht direkt in Tabelle 1. Hier ist erst eine *Partialbruchzerlegung* notwendig (siehe auch Abbildung 1):

7

Die Rücktransformation und damit die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist dann wegen der Linearitätseigenschaft (siehe Tabelle 2)

8

Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass sich dieselbe Lösung ergibt, wenn man
   a) die homogene und die partikuläre Lösung x_h und x_p respektive bestimmt, und

   b) die Lösung mit Hilfe der entsprechenden Korrespondenz in der Tabelle in [Pap12, Seite 657f, Kapitel 4.2] bestimmt.

2. Lösen Sie die Differentialgleichung $\dot{x}+x=0$, $x(0)=1$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösungen:

9

Wichtig: Voraussetzung für die Lösung von Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation ist, dass die linke und rechte Seite der Differentialgleichung $= 0$ für $t < 0$ ist!

5 Übungen

[Pap12, Seite 676ff]: Alle Aufgaben zu Abschnitt 1, 2, 4 und 5. Für manche Aufgaben ist die umfangreichere Tabelle der Laplace-Transformationen in [Pap12, Seite 657f, Kapitel 4.2] notwendig.

Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 1. Vieweg + Teubner, 2011.

[Pap12] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.

Anhang

Tabelle 1: Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation mit $f(t<0)=0$

Nr.	$f(t)$, $t \geq 0$	$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$ oder 1	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$t^n e^{-at}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
8	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
9	$\mathrm{e}^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
10	$\mathrm{e}^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
11	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
12	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
13	$1 - \mathrm{e}^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
14	$\mathrm{e}^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$

Tabelle 2: Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
Verschiebungssatz	$f(t - T_\mathrm{t}) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)\mathrm{e}^{-sT_\mathrm{t}}$
Dämpfungssatz	$\mathrm{e}^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s + a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2 F(s) - sf(0) - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\|_0$
n-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \left.\frac{\mathrm{d}^{i-1} f}{\mathrm{d}t^{i-1}}\right\|_0$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0+) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} \Big(sF(s)\Big)$
2. Grenzwertsatz	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} \Big(sF(s)\Big)$

Eine *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus *Partialbrüchen* zerlegen:

1. Zunächst werden die *Nullstellen des Nennerpolynoms* $N(x)$ nach *Lage* und *Vielfalt* bestimmt.

2. *Jeder* Nullstelle wird ein *Partialbruch* in folgender Weise zugeordnet, wobei konjugiert komplexe Nullstellen zum entsprechenden reellen quadratischen Term zusammengefasst werden können:

x_1:	*Einfache* Nullstelle	$\rightarrow$	$\dfrac{A}{x - x_1}$
x_1:	*Zweifache* Nullstelle	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{(x - x_1)^2}$
$\vdots$			
x_1:	*r-fache* Nullstelle	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots \dfrac{A_r}{(x - x_1)^r}$
$x^2 + ax + b$:	1-*facher* quadratischer Term	$\rightarrow$	$\dfrac{Ax + B}{x^2 + ax + b}$
$(x^2 + ax + b)^2$:	2-*facher* quadratischer Term	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \dfrac{A_2x + B_2}{(x^2 + ax + b)^2}$
$(x^2 + ax + b)^r$:	*r-facher* quadratischer Term	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \cdots + \dfrac{A_rx + B_r}{(x^2 + ax + b)^r}$

3. Die *echt* gebrochenrationale Funktion $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ ist dann als *Summe aller Partialbrüche* darstellbar.

4. Bestimmung der Konstanten durch *Koeffizienten-Vergleich.*

Abbildung 1: Algorithmus zur Partialbruchzerlegung aus [Pap11, Seite 469]