(7) Gewöhnliche Differentialgleichungen

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 31. Juli 2014, 13:52

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: http://www.z5z6.de

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

1.1 Lösung durch Ansatz

Eine Differentialgleichung hat zwei Zutaten: erstens eine Gleichung, in der eine Ableitung einer gesuchten Funktion vorkommt und zweitens einen Startpunkt („Anfangswert") im Phasenraum. Hier ist eine ganz einfache:

$$y'(x) = \sin x \quad \text{mit} \quad y(3) = 7$$

Die Lösung lässt sich finden, indem man die Form der Lösung rät („Ansatz"):

1

Der Ansatz – die kultivierte Art des Ratens – ist beim Lösen vom Differentialgleichungen gang und gäbe. Wenn man eine Lösungsfunktion zum vorgegebenen Anfangswert angeben kann, hat man gewonnen, egal, wie man auf die Lösung gekommen ist. Denn (bis auf pathologische Fälle in der Mathematik) ist die Lösung *eindeutig*.

1.2 Homogene lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine nicht mehr ganz triviale Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist:

$$y'(x) + 5y(x) = 0 \quad \text{mit} \quad y(3) = 7$$

Diese ist homogen. Was wäre hier ein naheliegender Ansatz für die Lösungsfunktion y?

2

Als Lösung ergibt sich damit:

3

Ohne die Anfangsbedingung schreibt man das Ergebnis mit einer „Integrationskonstanten":

4

Für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung muss man als Anfangswert die Werte von $y(x_0)$, $y'(x_0), \ldots$ bis $y^{(n-1)}(x_0)$ vorgeben (Startpunkt im Phasenraum!) – oder n unabhängige (!) Integrationskonstanten in der Lösung haben. Diese Lösung mit n Größen zum Einstellen heißt dann die *allgemeine* Lösung y_h der *homogenen* linearen Differentialgleichung.

1.3 Inhomogene lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Nun eine inhomogene Variante derselben Differentialgleichung:

$$y'(x) + 5y(x) = x^2$$

Man sucht nun zunächst eine *spezielle (partikuläre)* Lösung y_p dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung, also irgendeine Lösung zu irgendeinem Anfangswert. Was wäre dafür ein sinnvoller Ansatz?

5

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu finden, addiert man eine spezielle Lösung y_p (wie die eben gefundene) der inhomogenen Differentialgleichung zu einer allgemeinen Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung (auch bereits bekannt):

6

1.4 Variation der Konstanten

Eine andere Art, die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zu finden, ist die *Variation der Konstante:* Man setzt die Integrationskonstante der homogenen Differentialgleichung als Funktion statt als Konstante an:

7

ACHTUNG: Dies geht nur bei erster Ordnung!

2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

2.1 Homogene lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Der Prototyp für homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist das Federpendel mit Auslenkung x zur Zeit t, Masse m, Federkonstante C und Reibungskonstante r:

8

Welche Größen muss man als Anfangsbedingung angeben?

9

2.2 Lösung durch Ansatz

Ansatz mit Hilfe der komplexen Konstanten λ:

10

Dann muss für λ gelten:

11

Es ergeben sich also typischerweise *zwei* verschieden Lösungen $\lambda_{1,2}$. Was passiert, wenn die $\lambda_{1,2}$ einen imaginären Anteil haben?

12

Was passiert, wenn der Realteil negativ ist?

13

Was passiert, wenn der Realteil positiv ist? (Ist das hier möglich?)

14

Die beiden Lösungen der Differentialgleichung zu den beiden $\lambda_{1,2}$ darf man beliebig zusammenmischen und hat wieder eine Lösung, weil die DGL linear und homogen ist:

15

Damit hat man zwei Integrationskonstanten und so die Möglichkeit, alle erdenklichen Anfangswerte einzustellen, wenn die beiden $\lambda_{1,2}$ verschieden voneinander sind:

16

Wenn die beiden $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ gleich sind, lässt sich eine zweite Lösung der Differentialgleichung mit te^{λ} finden:

17

2.3 Inhomogene lineare DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Differentialgleichung des Federpendels gibt es auch in einer inhomogenen Variante: Man regt das Pendel mit einer oszillierenden Kraft der Frequenz f und der Amplitude $\hat{F}$ an:

18

Hier wendet man wieder den Trick an, zu der allgemeinen Lösung der homogenen DGL eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu addieren, um die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zu erhalten:

19

Welcher Ansatz liegt für die spezielle Lösung der inhomogenen DGL nahe?

20

3 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Die Trennung der Variablen [separation of variables] ist ein beliebter Trick, um Differentialgleichungen erster Ordnung (und nur erster Ordnung) zu lösen, insbesondere auch *nichtlineare*. Zum Beispiel die Differentialgleichung

$$\mathrm{e}^y y' = x^5 \text{ mit } y(3) = 7$$

hat „trennbare“ Variablen [separable variables]: Auf der einen Seite steht nur y' mal eine Funktion von y; auf der anderen Seite steht nur x. Versuchen wir, beide Seiten vom Startpunkt $(x, y) = (3, 7)$ bis zu einem noch unbekannten Endpunkt (x_1, y_1) zu integrieren:

21

Das linke Integral vereinfacht sich netterweise wegen der Substitutionsregel:

22

Und es ergibt sich als Lösung:

23

Rein formal kann man auch ohne Substitutionsregel arbeiten, indem man die Differentialgleichung umformt zu

24

und dann auf beiden Seiten von $(x, y) = (3, 7)$ bis (x_1, y_1) integriert:

25

Falls ein unbestimmtes Integral gefragt ist, darf man nicht vergessen, eine Integrationskonstante dazuzuschreiben:

26

4 Übungsaufgaben

[Pap12, S.519ff]: Abschnitt 1: alle Aufgaben, Abschnitt 2: Aufgaben 4, 5, 8, 9, 10, 14 bis 26, 28, Abschnitt 3: Aufgaben 1 bis 8 und 10 bis 14, [Pap10, S.357ff]: Aufgaben G1 bis G11, G25 bis G44, G53 bis G71

Literatur

[Pap10] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 4. Auflage. Bd. Klausur und Übungsaufgaben. Vieweg + Teubner, 2010.

[Pap12] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 13. Auflage. Bd. 2. Vieweg + Teubner, 2012.