

# 6 Vektoranalysis Kurven

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 31. Juli 2014, 13:51

Die nummerierten Felder bitte mithilfe der Videos ausfüllen: <http://www.z5z6.de>



This work is based on the works of Jörn Loviscach <http://www.j317h.de> and licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Bitte hier notieren, was beim Bearbeiten unklar geblieben ist:

## Inhaltsverzeichnis

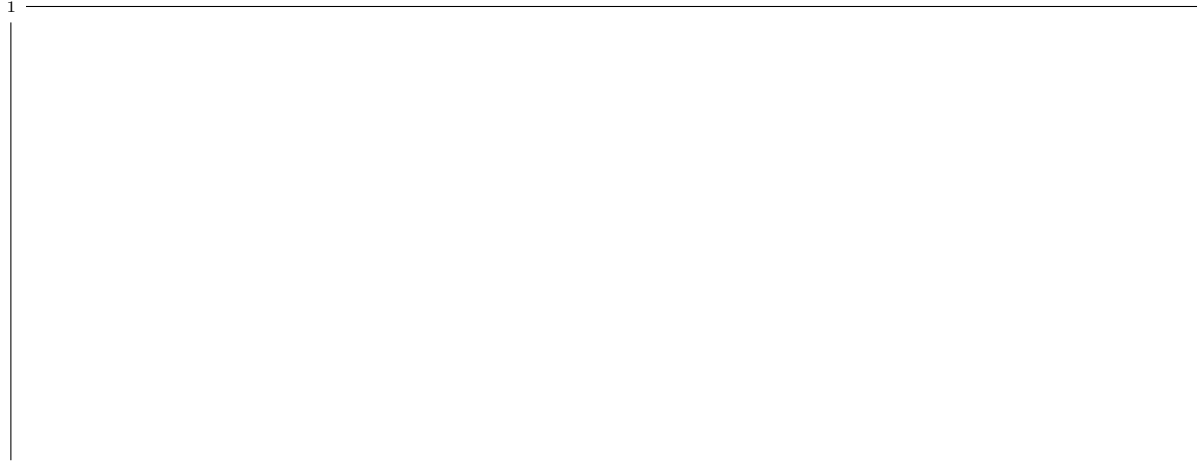
<b>Nomenklatur</b>	<b>1</b>
<b>1 Vektorielle Darstellung von Kurven</b>	<b>1</b>
1.1 Zeitableitung, Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor . . . . .	2
1.2 Bogenlänge . . . . .	3
1.3 Krümmung . . . . .	3
1.4 Anwendungsbeispiel: Tangential- und Normalkomponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	5
<b>2 Kurven- oder Linienintegrale</b>	<b>5</b>
<b>3 Übungsaufgaben</b>	<b>6</b>

## Nomenklatur

Im Druck sind Vektoren klein und fett  $\mathbf{a}$  und Matrizen groß und fett  $\mathbf{A}$  geschrieben. Handschriftlich werden Vektoren und Matrizen durch einen Unterstrich gekennzeichnet:  $\underline{a}$ ,  $\underline{A}$

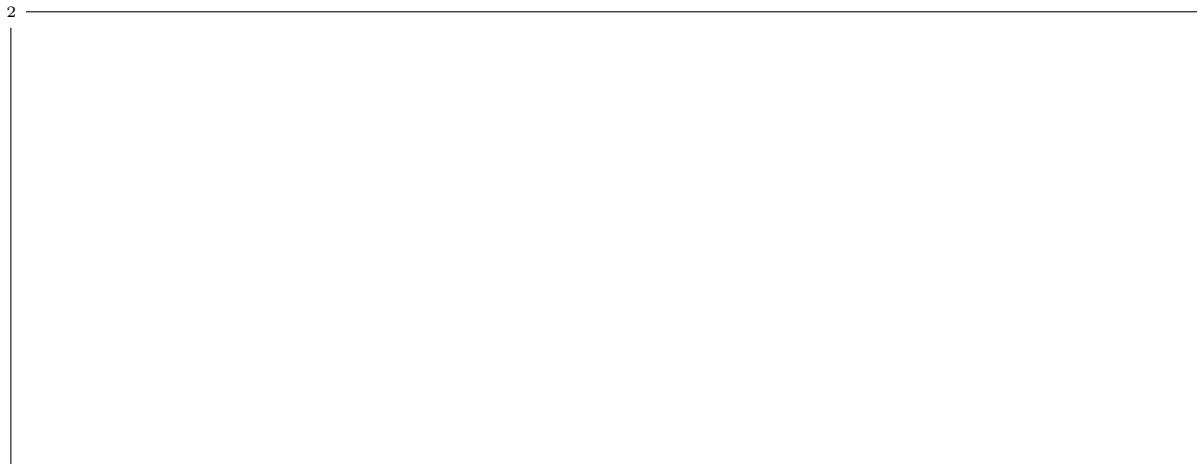
## 1 Vektorielle Darstellung von Kurven

Bewegungsabläufe, wie zum Beispiel die zwei- oder dreidimensionale Bewegung eines Körpers, lassen sich am besten vektoriell darstellen. Die Raumkoordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind dabei abhängig von einem gemeinsamen Parameter. Die Parametergröße ist häufig die Zeit  $t$  (bei kreisförmigen Bewegungen bietet sich auch ein Winkel  $\varphi$  an). Beispiel schiefer Wurf:



### 1.1 Zeitableitung, Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor

Die Zeitableitung<sup>1</sup> eines Vektors  $\mathbf{r}$  ist ein Tangentenvektor  $\dot{\mathbf{r}}$ :



Für den Tangenteneinheitsvektor  $\mathbf{e}_T$  gilt dann

Der Hauptnormaleneinheitsvektor  $\mathbf{e}_N$  lässt sich mit Hilfe der Ableitung des Skalarprodukts  $\mathbf{e}_T \cdot \mathbf{e}_T$  bestimmen:

3

---

<sup>1</sup>Summen-, Produkt- und Kettenregel gelten analog auch für die Ableitung von Vektoren.

4

## 1.2 Bogenlänge

Die Bogenlänge  $s$  einer Kurve lässt sich mit Hilfe des Zusammenhangs  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$  leicht herleiten:

5

Aufgabe: Leiten Sie die Bogenlänge einer ebenen Kurve mit  $y = f(x)$  und  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$  her:

6

## 1.3 Krümmung

Die *Krümmung*  $\kappa$  einer Kurve ist definiert als die Änderung des Tangenteneinheitsvektors  $\mathbf{e}_T$  in Abhängigkeit von der Bogenlänge  $s$ :

7

---

Für einen zeitabhängigen<sup>2</sup> Vektor  $\mathbf{r}(t)$  lässt sich eine einfache Formel für die Krümmung  $\varkappa$  aus dem Kreuzprodukt  $\mathbf{e}_T \times \mathbf{e}'_T$  herleiten:

8

---

Aufgabe: Leiten Sie die Krümmung  $\varkappa$  für die ebene Kurve  $y = f(x)$  mit  $\mathbf{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$  her.

---

<sup>2</sup>Der Vektor kann auch von einem beliebigen anderen Parameter  $k$  abhängen, die Zeitableitung  $\frac{d}{dt}$  ist dann durch die Ableitung  $\frac{d}{dk}$  zu ersetzen.

9

---

#### 1.4 Anwendungsbeispiel: Tangential- und Normalkomponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ein Massepunkt bewege sich auf einer Bahn mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$ . Für die Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors gilt dann

10

---

Für den Beschleunigungsvektor gilt dann

11

---

## 2 Kurven- oder Linienintegrale

Ein Massepunkt wird durch ein Kraftfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  bewegt. Welche Arbeit ist dabei zu leisten oder wird dabei frei? Um das zu berechnen, ist entlang der Bahnkurve  $\mathbf{r}(t)$  des Körpers „Kraft in

### 3 Übungsaufgaben

Wegrichtung mal Weg“ aufzusummieren:

12

---

Das lässt sich ausrechnen, indem man den konkreten Zeitverlauf der Bahn einsetzt:

13

---

Dies ist ein bestimmtes Integral in einer Dimension, wie man es kennt. Wenn das Kraftfeld nicht von der Zeit abhängt, ist es egal, welchen konkreten Zeitverlauf man zum Ausrechnen nimmt; Hauptsache, alle Punkte werden mindestens einmal angefahren. Für Kurvenintegrale über geschlossene Bahnen (das heißt Anfangspunkt = Endpunkt) schreibt man auch einen Kringel durch das Integralzeichen:  $\oint$ . Diese Integrale treten insbesondere bei der Berechnung von Induktionsspannungen auf. Der Pfad beschreibt dann keine Bewegung, sondern die Form des Leiters.

### 3 Übungsaufgaben

[Pap11, S.230ff]: alle Aufgaben zu Abschnitt 1

#### Literatur

[Pap11] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 6. Auflage. Bd. 3. Vieweg + Teubner, 2011.