Mathematatik 2, Analysis

Klausur vom 24.11.2014

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 24. November 2014, 10:22

Name	Vorname

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 12 Punkte. Hilfsmittel: maximal zehn einseitig oder fünf beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Taschenrechner; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Computer, kein Mobiltelefon.

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitungen die Stellen (x_i, y_i), an der die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^4$$

Extremwerte besitzt. Geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix im Bildbereich $\Phi(s)$ zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - x_2 + \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

Begründen Sie kurz, ob für die Rücktransformation in den Zeitbereich Partialbruchzerlegungen notwendig wären. *Nur die Begründung angeben, die Rücktransformation ist hier nicht verlangt!*

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Arbeit des ebenen Kraftfeldes

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} x + y^2 \\ 3\sqrt{x} - y \end{bmatrix}$$

beim Verschieben einer Masse von dem Punkt $(0,0)$ nach $(4,2)$ längs der Kurve $y = \sqrt{x}$.

Aufgabe 5:

Lösen Sie $y' + y^2 \sin(x) = 0$ zur Anfangsbedingung $y(\pi) = 1$. *Hinweis:* $\cos\pi = -1$

Aufgabe 6:

Lösen Sie $\dot{x} + x = t$ für $t \geq 0$ und $x(0) = -1$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.
Hinweis: Korrespondenzen und Rechenregeln der Laplace-Transformation finden Sie ab Seite 3.

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Funktion $x(t)$, deren Laplace-Transformierte $X(s) = \dfrac{7}{s^2 + 5s + 6}$ ist.
Hinweis: Korrespondenzen und Rechenregeln der Laplace-Transformation finden Sie ab Seite 3.

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie das Volumen, das der hyperbolische Paraboloid

$$z = f(r,\varphi) = 2r^2 \sin\varphi \cos\varphi + 3$$

mit der Fläche zwischen den Kurven

$$y = x^2 \text{ und } y = 2 - x^2$$

einschließt.

Aufgabe 9:

An welcher Stelle besitzt die Kurve mit der impliziten Darstellung $x^2 + x\,y^2 + 2\,y = 0$ eine senkrechte Tangente?

Aufgabe 10:

Gegeben sei die Funktion $f(x;y;z) = xyz + y^2$. Schätzen Sie $f(0.99;2.01;3.03)$ durch lineare Näherung von f an $(x_0;y_0;z_0) = (1;2;3)$.

Tabelle 1: Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation mit $f(t<0)=0$

Nr.	$f(t)$, $t \geq 0$	$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$ oder 1	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$t^n e^{-at}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
8	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
9	$\mathrm{e}^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
10	$\mathrm{e}^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
11	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
12	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
13	$1 - \mathrm{e}^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
14	$\mathrm{e}^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$

Tabelle 2: Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
Verschiebungssatz	$f(t - T_\mathrm{t}) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s)\mathrm{e}^{-sT_\mathrm{t}}$
Dämpfungssatz	$\mathrm{e}^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s + a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2 F(s) - sf(0) - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\|_0$
n-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \left.\frac{\mathrm{d}^{i-1} f}{\mathrm{d}t^{i-1}}\right\|_0$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\; F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0+) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} \Big(sF(s)\Big)$
2. Grenzwertsatz	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} \Big(sF(s)\Big)$

Eine *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus *Partialbrüchen* zerlegen:

1. Zunächst werden die *Nullstellen des Nennerpolynoms* $N(x)$ nach *Lage* und *Vielfalt* bestimmt.

2. *Jeder* Nullstelle wird ein *Partialbruch* in folgender Weise zugeordnet, wobei konjugiert komplexe Nullstellen zum entsprechenden reellen quadratischen Term zusammengefasst werden können:

x_1:	*Einfache* Nullstelle	$\rightarrow$	$\dfrac{A}{x - x_1}$
x_1:	*Zweifache* Nullstelle	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{(x - x_1)^2}$
$\vdots$			
x_1:	r-*fache* Nullstelle	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots \dfrac{A_r}{(x - x_1)^r}$
$x^2 + ax + b$:	1-*facher* quadratischer Term	$\rightarrow$	$\dfrac{Ax + B}{x^2 + ax + b}$
$(x^2 + ax + b)^2$:	2-*facher* quadratischer Term	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \dfrac{A_2x + B_2}{(x^2 + ax + b)^2}$
$(x^2 + ax + b)^r$:	r-*facher* quadratischer Term	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \cdots + \dfrac{A_rx + B_r}{(x^2 + ax + b)^r}$

3. Die *echt* gebrochenrationale Funktion $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ ist dann als *Summe aller Partialbrüche* darstellbar.

4. Bestimmung der Konstanten durch *Koeffizienten-Vergleich.*

Algorithmus zur Partialbruchzerlegung