Teil I.
Aufgaben

Mathematik 2, Analysis

Klausur vom 24.11.2014

Zoltán Zomotor

Versionsstand: 24. November 2014, 10:22

Name	Vorname

Drei Punkte pro Aufgabe. Mindestpunktzahl zum Bestehen: 12 Punkte. Hilfsmittel: maximal zehn einseitig oder fünf beidseitig beschriftete DIN-A4-Spickzettel beliebigen Inhalts, möglichst selbst verfasst oder zusammengestellt; kein Taschenrechner; kein Skript, keine andere Formelsammlung, kein Computer, kein Mobiltelefon.

Aufgabe 1:.

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

Aufgabe 2:.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitungen die Stellen (x_i, y_i), an der die Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^4$$

Extremwerte besitzt. Geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

Aufgabe 3:.

Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix im Bildbereich $\Phi(s)$ zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - x_2 + \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

Begründen Sie kurz, ob für die Rücktransformation in den Zeitbereich Partialbruchzerlegungen notwendig wären. *Nur die Begründung angeben, die Rücktransformation ist hier nicht verlangt!*

Aufgabe 4:.

Bestimmen Sie die Arbeit des ebenen Kraftfeldes

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} x + y^2 \\ 3\sqrt{x} - y \end{bmatrix}$$

beim Verschieben einer Masse von dem Punkt $(0, 0)$ nach $(4, 2)$ längs der Kurve $y = \sqrt{x}$.

Aufgabe 5:.

Lösen Sie $y' + y^2 \sin(x) = 0$ zur Anfangsbedingung $y(\pi) = 1$. *Hinweis:* $\cos \pi = -1$

Aufgabe 6:.

Lösen Sie $\dot{x} + x = t$ für $t \geq 0$ und $x(0) = -1$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.
Hinweis: Korrespondenzen und Rechenregeln der Laplace-Transformation finden Sie ab Seite 4.

Aufgabe 7:.

Bestimmen Sie die Funktion $x(t)$, deren Laplace-Transformierte $X(s) = \dfrac{7}{s^2 + 5s + 6}$ ist.
Hinweis: Korrespondenzen und Rechenregeln der Laplace-Transformation finden Sie ab Seite 4.

Aufgabe 8:.

Bestimmen Sie das Volumen, das der hyperbolische Paraboloid

$$z = f(r, \varphi) = 2r^2 \sin\varphi \cos\varphi + 3$$

mit der Fläche zwischen den Kurven

$$y = x^2 \text{ und } y = 2 - x^2$$

einschließt.

Aufgabe 9:.

An welcher Stelle besitzt die Kurve mit der impliziten Darstellung $x^2 + x\,y^2 + 2\,y = 0$ eine senkrechte Tangente?

Aufgabe 10:.

Gegeben sei die Funktion $f(x; y; z) = xyz + y^2$. Schätzen Sie $f(0.99; 2.01; 3.03)$ durch lineare Näherung von f an $(x_0; y_0; z_0) = (1; 2; 3)$.

Tabelle 1: Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation mit $f(t < 0) = 0$

Nr.	$f(t),\, t \geq 0$	$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t$
1	$\delta(t)$	1
2	$h(t)$ oder 1	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n,\, n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$t^n e^{-at},\, n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
8	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
9	$\mathrm{e}^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
10	$\mathrm{e}^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
11	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
12	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
13	$1 - \mathrm{e}^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
14	$\mathrm{e}^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$

Tabelle 2: Rechenregeln für die Laplace-Transformation

Linearitätseigenschaft	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
Verschiebungssatz	$f(t - T_\mathrm{t})$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s) \mathrm{e}^{-sT_\mathrm{t}}$
Dämpfungssatz	$\mathrm{e}^{-at} f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s + a)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$sF(s) - f(0)$
2-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^2 F(s) - s f(0) - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\|_0$
n-fache Differentiation	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \left.\frac{\mathrm{d}^{i-1} f}{\mathrm{d}t^{i-1}}\right\|_0$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s} F(s)$
Faltungssatz	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
1. Grenzwertsatz	$f(0+) = \lim\limits_{\Re(s)\to\infty} \big(sF(s)\big)$		
2. Grenzwertsatz	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} \big(sF(s)\big)$		

Eine *echt* gebrochenrationale Funktion vom Typ $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ lässt sich schrittweise wie folgt in eine Summe aus *Partialbrüchen* zerlegen:

1. Zunächst werden die *Nullstellen des Nennerpolynoms* $N(x)$ nach *Lage* und *Vielfalt* bestimmt.

2. *Jeder* Nullstelle wird ein *Partialbruch* in folgender Weise zugeordnet, wobei konjugiert komplexe Nullstellen zum entsprechenden reellen quadratischen Term zusammengefasst werden können:

x_1:	*Einfache* Nullstelle	$\rightarrow$	$\dfrac{A}{x - x_1}$
x_1:	*Zweifache* Nullstelle	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{(x - x_1)^2}$
$\vdots$			
x_1:	*r-fache* Nullstelle	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots \dfrac{A_r}{(x - x_1)^r}$
$x^2 + ax + b$:	1-*facher* quadratischer Term	$\rightarrow$	$\dfrac{Ax + B}{x^2 + ax + b}$
$(x^2 + ax + b)^2$:	2-*facher* quadratischer Term	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \dfrac{A_2x + B_2}{(x^2 + ax + b)^2}$
$(x^2 + ax + b)^r$:	*r-facher* quadratischer Term	$\rightarrow$	$\dfrac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \cdots + \dfrac{A_rx + B_r}{(x^2 + ax + b)^r}$

3. Die *echt* gebrochenrationale Funktion $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ ist dann als *Summe aller Partialbrüche* darstellbar.

4. Bestimmung der Konstanten durch *Koeffizienten-Vergleich.*

Algorithmus zur Partialbruchzerlegung

Teil II.
Lösungen

Lösung 1:.

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\,(1+\mathrm{j}\omega)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-t\,(1+\mathrm{j}\omega)}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}\left(\underbrace{-\mathrm{e}^{-0\cdot(1+\mathrm{j}\omega)}}_{=0} \underbrace{-\left(-\mathrm{e}^{-0\cdot(1+\mathrm{j}\omega)}\right)}_{=1}\right) \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}
\end{aligned}
$$

Lösung 2:.

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^4$$

$$f_x = x + y \quad f_y = x + y^3 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = -y^3$$

$$\Rightarrow f_x = -y^3 + y \stackrel{!}{=} 0 = y(1-y^2)$$

$$\Rightarrow y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = -1$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1$$

$f_{xx} = 1 \Rightarrow$ Tiefpunkt möglich

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 \end{bmatrix} \quad \left|H_f\right| = 3y^2 - 1$$

$\left|H_f(0,0)\right| = -1 \Rightarrow (0,0)$: Kein Extremwert

$\left|H_f(1,-1)\right| = 2 \Rightarrow (1,-1)$: Tiefpunkt

$\left|H_f(-1,1)\right| = 2 \Rightarrow (-1,1)$: Tiefpunkt

Lösung 3:.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 4 & s+1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\Phi}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -4 & s+1 \end{bmatrix}$$

Reelle Nennernullstellen 1 und -3, daher Partialbruchzerlegung notwendig.

Lösung 4:.

Lösung 5:.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 \sin(x)$$
$$\Rightarrow \int_1^{y_1} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\int_\pi^{x_1} \sin x \,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{y} + 1 = \cos x + 1$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{\cos x}$$

Lösung 6:.

$$sX(s) - (-1) + X(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} - \frac{1}{s+1}$$
$$\Rightarrow x(t) = t - 1$$

Lösung 7:.

$$X(s) = \frac{7}{(s+2)(s+3)} = \frac{7}{s+2} - \frac{7}{s+3}$$
$$\Rightarrow x(t) = 7\mathrm{e}^{-2t} - 7\mathrm{e}^{-3t}$$

Lösung 8:.

Schnittpunkte $f_\text{u} = x^2$ und $f_\text{o} = 2 - x^2$ sind $x = \pm 1$. Transformation auf kartesische Koordinaten mit $r = \dfrac{x}{\cos\varphi} = \dfrac{y}{\sin\varphi}$

$$\begin{aligned}
z &= 2\frac{x}{\cos\varphi}\frac{y}{\sin\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + 3 = 2xy + 3 \\
V &= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=x^2}^{2-x^2} 2xy + 3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-1}^{1} [xy^2 + 3y]_{y=x^2}^{2-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-1}^{1} (-4x^3 - 6x^2 + 4x + 6)\,\mathrm{d}x \\
&= [-x^4 - 2\,x^3 + 2\,x^2 + 6\,x]_{-1}^{1} \\
&= 8
\end{aligned}$$

Lösung 9:.

$$y' = \frac{-F_x}{F_y} = -\frac{2x + y^2}{2xy + 2}$$

Senkrechte Tangente: $F_y = 0 = 2xy + 2 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{x}$. Einsetzen und mit y^2 durchmultiplizieren:

$$x^2 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1, y = -1$$

Senkrechte Tangente an der Stelle $(1, -1)$

Lösung 10:.

$$\begin{aligned}
&f(1;2;3) = 10 \\
&\qquad f_x = yz \qquad\qquad && f_x(1,2,3) = 6 \\
&\qquad f_y = xz + 2y && f_y(1,2,3) = 7 \\
&\qquad f_z = xy && f_z(1,2,3) = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= f(1,2,3) + f_x(x-1) + f_y(y-2) + f_z(z-3) \\
f(0.99; 2.01; 3.03) &= 10 + 6\cdot(-0.01) + 7\cdot 0.01 + 2\cdot 0.03 \\
&= 10.07
\end{aligned}$$